

E U C L I D I S
ELEMENTORUM,

SEX LIBRI PRIORES,

Cum NOTIS.

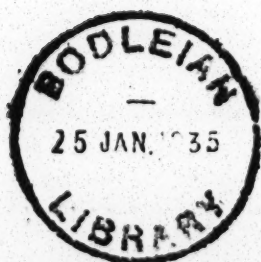
RADCLIFFE
OBSERVATORY
OXFORD.

Curâ

THOMÆ ELRINGTON, A. M.
COLL. TRIN. DUB. Socii. & M. R. I. A.

D U B L I N I I:

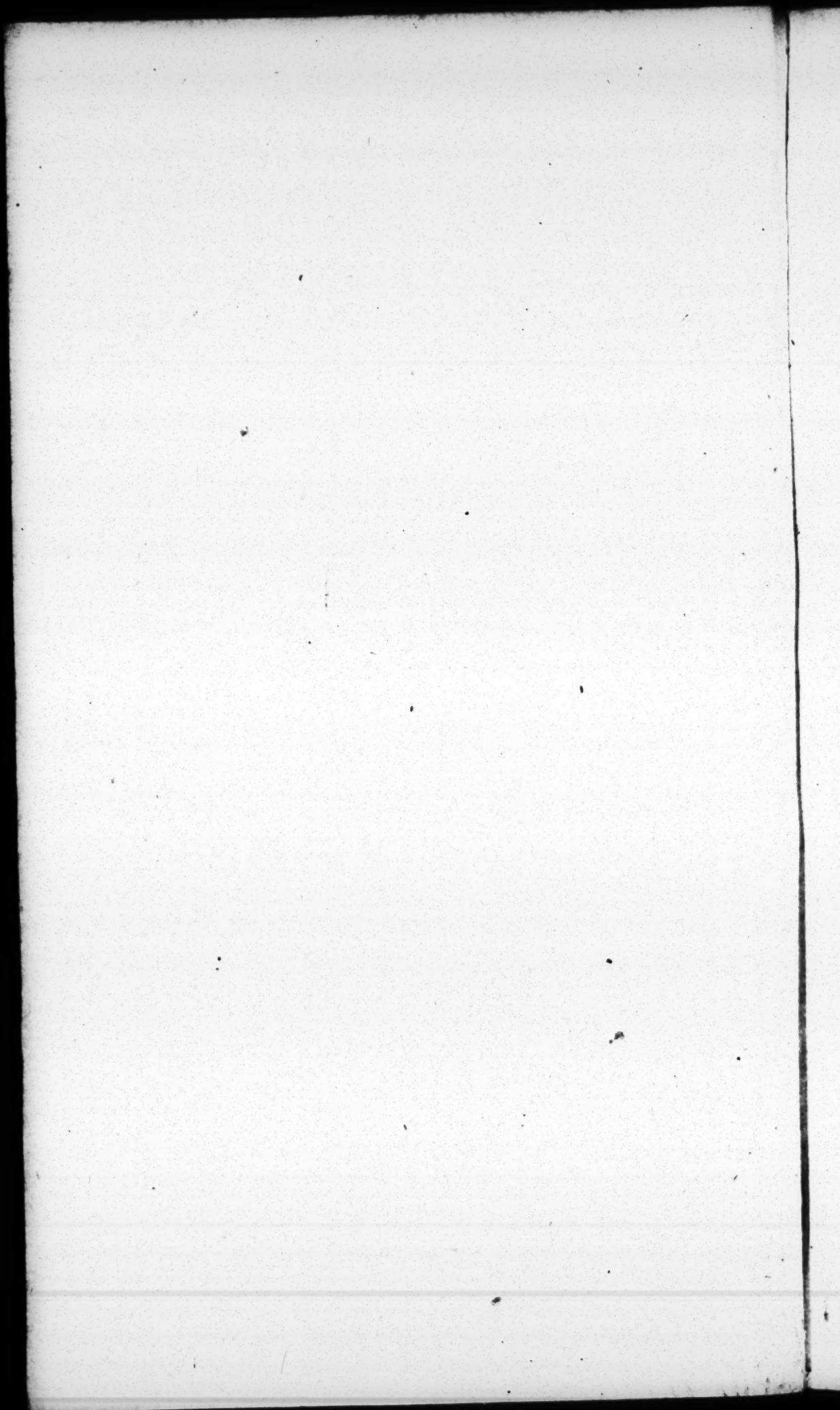
Excudebat
GEORGIUS GRIERSON.
ANNO MDCC LXXXIX.



AD LECTOREM.

IN hac editione quatuor priores libri, ut & sextus, Euclidis sunt, omiſſis tantummodo formis ratiocinandi ſyllogiſticis, quibus ille fere ſingulis in demonſtrationibus uſus eſt, additiſque Scholiis & Corollariis e commentariis optimis excerptis; inſigniorum quarundam mutationum rationes in notis redduntur. In libro autem quinto affectiones proportionaliſum methodo novâ demonſtrantur, hæc vero pars operis non tota quidem mea eſt, propoſitionum enim a 33^a. ad 38^m. & quoque 20^æ. demonſtrationes mihi communicavit Collegii huiusce Socius, vir rerum mathematicarum peritiſſimus, cum ipſe ex iis ſolam 34^m. eamque argumento multò difficiliſſiori demonſtraveram.

TRIN. COLL. DUB.
Cal. Mart. 1789.



E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M .

L I B E R P R I M U S .

D E F I N I T I O N E S .

1. **P**UNCTUM est cujus nulla est pars. *Vide N.*
2. Linea est longitudo, latitudinis expers.
3. Lineæ termini sunt puncta.
4. Recta linea est quæ ex æquo suis terminis inter- *Figura 1.*
jicitur. *Tabula 1.*
5. Superficies est id quod latitudinem & longitu-
dinem tantum habet.
6. Superficie termini sunt lineæ.
7. Plana superficies est, quæ ex æquo suas extremas li- *Vide N.*
neas rectas interjacet.
8. Angulus rectilineus est duarum rectarum sese tan- *Vide N.*
gentium & non in directum jacentium, alterius ad alte- *Fig. 2.*
ram inclinatio.
9. Crura anguli, sunt lineæ quæ angulum efficiunt. *Vide N.*
10. Vertex anguli, est punctum in quo crura sibi
mutuo occurrunt.
11. Cum recta linea super rectâ lineâ insists an- *Fig. 3.*
gulos qui deinceps sunt (ABC & ABD) æquales fecerit,
uterque angulorum æqualium est rectus. linea vero in-
sists appellatur perpendicularis.
12. Angulus (ABC) qui recto major est, appellatur *Fig. 4.*
obtusus.
13. Angulus (ABD) qui recto minor est, appel- *Fig. 4.*
latur acutus. *Vide N.*
14. Figura plana est superficies plana unâ vel plu-
ribus lineis undique terminata.
15. Circulus est figura plana, unâ lineâ contenta, *Fig. 5.*
quæ circumferentia appellatur; ad quam ab uno puncto
intra figuram existente, omnes rectæ lineæ pertingentes
sunt æquales.
16. Punctum istud appellatur centrum circuli.
17. Diameter circuli est recta linea per centrum ducta *Vide N.*
& ex utraque parte in circumferentiâ terminata.
18. Radius

18. Radius est recta ducta a centro ad circumferentiam
 19. Semicirculus est figura quæ continetur diametro & parte circumferentiæ quæ a diametro intercipitur.
 20. Rectilinea figura est superficies plana rectis lineis undique terminata.
 21. Triangulum est plana superficies quæ tribus rectis continetur.
Fig. 6. 22. Triangulum æquilaterum est, quod tria latera habet æqualia.
Fig. 7. 23. Triangulum isosceles est, quod duo latera habet æqualia.
Fig. 8. 24. Triangulum scalenum est, quod tria latera inæqualia habet.
Fig. 8. 25. Triangulum rectangulum est, quod unum angulum habet rectum.
Fig. 9. 26. Triangulum obtusangulum est, quod unum angulum habet obtusum.
Fig. 7. 27. Triangulum acutangulum est, quod tres habet angulos acutos.
Fig. 10. 28. Rectæ lineæ parallelæ sunt, quæ in eodem plano existentes, in infinitum productæ ad neutram partem concurrant.
 29. Quadrilatera figura est rectilinea figura quæ quatuor rectis continetur.
Fig. 11. 30. Parallelogrammum est figura quadrilatera cujus opposita latera sunt parallela.
 31. Quadratum est figura quadrilatera quæ æquilatera & rectangula est.
 32. Figuræ rectilinæ quæ plura quam quatuor habent latera, polygonæ appellantur.

Postulata.

1. **P**ostulatur, a quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.
2. Rectam lineam terminatam, in continuum & directum producere.
3. Quovis centro & quovis intervallo circulum describere.

Vide N.

Communes notiones seu Axiomata.

1. Quæ eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt.
2. Si æqualibus æqualia adjiciantur tota erunt æqualia.
3. Si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.
4. Si inæqualibus æqualia adjiciantur, tota sunt inæqualia.
5. Si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.
6. Quæ ejusdem vel æqualium sunt duplicia, inter se sunt æqualia.
7. Quæ ejusdem vel æqualium sunt dimidia, inter se sunt æqualia.
8. Quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia.
9. Totum est suâ parte majus.
10. Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.
11. Omnes anguli recti inter se æquales sunt. *Vide N.*
12. Si in duas rectas lineas recta linea incidens, angulos interiores ad easdem partes duobus rectis minores fecerit, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ, inter se convenient ad eam partem ad quam sunt anguli duobus rectis minores. *Vide N.*

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Fig. 12.

Super datâ rectâ finitâ (AB) triangulum æquilaterum constituere.

Vide N.

(1) per
post. 3.
(2) per
post. 1.

(3) per
defn. 15.

(4) per
ax. 1.

Centro A & intervallo AB describatur circulus BCD (1). Centro B & intervallo BA describatur circulus ACE . Ab intersectione C ducantur rectæ CA & CB ad terminos datæ AB (2).

Patet ACB esse triangulum super datâ rectâ constitutum; est vero æquilaterum, nam AC æqualis est AB quoniam radii sunt ejusdem circuli DCB (3). BC vero ipsi BA æqualis est quoniam sunt radii ejusdem circuli ACE . Quoniam igitur utraque AC & BC eidem AB æqualis est, inter se sunt æquales (4), et ergo triangulum ACB est æquilaterum.

Schol. Ductis AG & GB similiter demonstrari potest triangulum AGB esse æquilaterum.

PROP. II. PROB.

Fig. 13.
Vide N.

Ad datum punctum (A), rectam, datæ rectæ finitæ (BC) æqualem, ponere.

(1) per
post. 1.
(2) per
prop. 1.
(3) per
post. 3.

(4) def.
15.

(5) per
construc.
(6) per
an. 3.

(7) per ax.
1.

A dato puncto ad terminum alterutrum B datæ rectæ, ducatur recta AB (1). Super AB constituatur triangulum æquilaterum ADB (2). Centro B , intervallo BC , describatur circulus GCF (3). Circumferentiæ ejus occurrat DB producta in G . Centro D , intervallo DG , describatur circulus GLO . Circumferentiæ ejus occurrat DA producta in L . AL æqualis est rectæ datæ BC .

Nam DL æqualis est ipsi DG , quoniam radii sunt ejusdem circuli GLO (4). auferantur utrinque DA & DB quæ sunt quæque æquales (5) & reliqua AL reliquæ BG æqualis erit (6). BG vero ipsi BC æquatur quoniam sunt radii ejusdem circuli GCF . Ergo utraque ipsarum AL & BC eidem BG æqualis est. Ergo & inter se sunt æquales (7). Posita est proinde ad punctum A , recta AL datæ BC æqualis.

Schol. Variatur positio rectæ AL pro diverso termino datæ ad quem recta a dato puncto ducitur, & quæque

que pro diversis partibus istius rectæ ad quas constituitur triangulum.

PROP. III. PROB.

Datis duabus rectis inæqualibus (AB & CF) *Fig. 14.*
a majore abscindere æqualem minori. *Vide N.*

Ad terminum alterutrum A rectæ majoris ponatur AD (1) per
minori ex datis CF æqualis (1). Centro A intervallo *prop. 2.*
 AD describatur circulus. Abscindet AE ipsi AD æqua- (2) per
lem (2) & proinde datæ CF quoque æqualem (3). *def. 15.*
(3) per
construc.
& *an. 1.*

PROP. IV. THEOREMA.

Si duo triacula ($EDF, ABC,$) habeant duo latera *Fig. 15.*
duobus æqualia, alterum alteri, (ED & DF ip- *Vide N.*
sis AB & BC) & angulos sub istis lateribus quoque
æquales, (D ipsi B), erunt & bases (EF & AC)
æquales, & anguli ad bases, æqualibus lateribus oppositi,
æquales (E ipsi A & F ipsi C), & quoque ipsa tri-
angula.

Nam si ita sibi applicentur triacula ut punctum D
caderet in B , & latus DE in BA & ut latera DF & BC
sint ad easdem partes, tunc quoniam latera DE & BA
æqualia sunt, punctum E caderet in A , & quoniam an-
guli D & B æquales sunt latus DF caderet in BC , &
quoniam latus DF lateri BC æquale est punctum F cade-
ret in C .

Sed congruentibus punctis E & F cum punctis A & C , (1) per ax.
congruent rectæ EF & AC (1) & ergo bases EF & AC 10.
æquales sunt (2). (2) per ax.

Et cruribus angulorum E & F congruentibus cum cru- 8.
ribus angulorum A & C , congruunt & ipsi anguli & er-
go æquales sunt (3). (3) per ax.

Et congruentibus rectis quibus triangulum EDF con- 8.
tinetur cum rectis quibus triangulum ABC continetur,
congruunt quoque ipsa triacula & ergo æqualia sunt (4). (4) per ax.
8.

PROP.

PROP. V. THEOR.

Fig. 16.

IN triangulo quovis isoscele (BAC) anguli ad basem (ABC & ACB) æquales sunt : & si latera æqualia producantur erunt anguli infra basem (FBC & GCB) quoque æquales.

(1) per prop. 3.

In crure alterutro producto sumatur punctum quodvis F , & fiat AG ; ipsi AF æqualis (1), & ducantur CF & BG .

(2) per const. & bypotb.

In triangulis FAC & GAB , latera FA & AC æquantur lateribus GA & AB (2), angulus vero A communis est, ergo angulus ACF ipsi ABG æqualis est, & angulus

(3) per prop. 4.

AFC ipsi AGB , & latus FC lateri GB æquale est (3.)

(4) per prop. 4.

Ergo in triangulis BFC , CGB , angulus BFC angulo CGB æquatur, & latus FC lateri GB , & desumptis æqualibus AB & AC ab æqualibus AF & AG , latus quoque BF lateri CG æquatur, ergo angulus FBC angulo GCB æqualis est (4), hi vero sunt anguli infra basem BC .

(5) per ax. 3.

Et in iisdem triangulis angulus FCB æquatur angulo GBC (4), & his desumptis ab æqualibus FCA & GBA , erunt reliqui anguli ACB & ABC æquales (5), hi vero sunt anguli ad basem BC dati trianguli.

Cor. Hinc omne triangulum æquilaterum est quoque æquiangulum; quodcunque enim latus pro base assumatur anguli ei adjacentes æquales erunt, quoniam æqualibus lateribus opponuntur.

PROP. VI. THEOR.

Fig. 17.

SI trianguli (BAC) duo anguli (B & C) æquales sint, latera iis opposita (AC & AB) æquantur.

(1) per prop. 3.

Non enim, sed fit alterutrum ex iis BA majus, & sumatur recta BD ipsi AC æqualis (1) & ducatur CD .

Quoniam in triangulis DBC , ACB latera DB , BC , lateribus AC , CB æquantur & anguli DBC & ACB qui æqualibus lateribus continentur sunt quoque æquales (2) erunt ipsa triangula DBC & ACB (3) æqualia, pars toti, quod absurdum, neutrum ergo latus BA vel AC altero majus est, sunt proinde æqualia.

4.

Cor.

Cor. Hinc omne triangulum æquiangulum est quoque æquilaterum; quodcunque enim latus pro base assumatur, anguli ipsi adjacentes æquales erunt, & ergo latera iis opposita.

PROP. VII. THEOR.

SUPER eâdem rectâ (AB) & ad easdem partes, *Fig. 18, 19,*
non possunt constitui duo triangula (ACB , ADB) & 20.
quorum latera contermina (AC & AD , BC & BD)
sint æqualia.

Constituantur enim si fieri potest & cadat primo vertex *Fig. 18.*
utriusque extra alterum, & ducatur CD .

Quoniam in triangulo CAD latera AD & AC æqualia (1) *per by-*
sunt (1) anguli ACD & ADC æquantur (2), sed ACD *poth.*
major est quam BCD , ergo ADC major est quam BCD , (2) *per*
& proinde BDC major est ipso BCD ; sed in triangulo CBD (3) *per by-*
latera BC & BD æqualia sunt (3), ergo anguli BDC & *poth.*
 BCD æquantur (4), est vero BDC ipso BCD major, quod (4) *per*
absurdum. Proinde triangula super eâdem rectâ constituta, *prop. 5.*
non habent latera contermina æqualia si vertex utriusque
cadat extra alterum.

Jam cadat vertex D alterutrius intra alterum, & ducta *Fig. 19.*
 CD , producantur AC & AD .

Quoniam in triangulo CAD latera AC & AD æqualia (5) *per by.*
sunt (5) anguli ECD & FDC æquantur (6), sed angulus *poth.*
 BDC major est quam FDC , ergo major quoque quam (6) *per prop.*
 ECD , & proinde major quam BCD . Sed in triangulo 5.
 CBD latera BC & BD æqualia sunt (5), ergo anguli
 BDC & BCD æquantur (6), est vero BDC ipso BCD
major, quod absurdum. Proinde triangula super eâdem
rectâ constituta, non habent latera contermina æqualia si
vertex alterutrius sit intra alterum.

Jam cadat vertex D alterutrius in latus AC alterius, & *Fig. 20.*
patet latera AC & AD non esse æqualia. Utcunque ergo
cadant vertices triangulorum, latera eorum contermina
non erunt æqualia.

PROP. VIII. THEOR.

Fig. 21.
Vide N.

SI duo triangula (ABC & EFD) habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri (AB ipsi EF & BC ipsi FD), habeant autem et basem (AC) basi (ED) æqualem; angulos quoque (B & F) qui æqualibus lateribus continentur, æquales habebunt.

- (1) *per prop.* Nam si ita sibi applicentur bases æquales AC & ED ,
7. ut latera æqualia, AB & EF , CB & DF , sint contermina,
(2) *per ax.* vertex B caderet in F (1), & latera æqualia AB & EF ,
10. CB & FD congruerent (2), ergo anguli B & F congrue-
(3) *per ax.* rent & proinde æquales sunt (3).
8.

Schol. Patet reliquos angulos A & E , C & D , æqualibus lateribus oppositos esse æquales, & quoque ipsa triangula.

PROP. IX. PROB.

Fig. 22.

DATUM angulum rectilineum (BAC) bifariam secare.

- (1) *per prop.* Ab A sumantur æquales AD & AE (1). Ducatur
3. DE & super ipsâ constituatur triangulum æquilaterum
(2) *per prop.* DFE (2). Recta jungens puncta A & F bisecabit da-
1. tum angulum BAC .
(3) *per conf.* Nam in triangulis FAD , FAE , latera AD & AE
æqualia sunt (3), AF vero commune, & basis DF basi
 EF æquatur (3), ergo anguli DAF & EAF æquales sunt
(4), & proinde recta AF bisecat angulum datum BAC .
(4) *per prop.* Cor. Ope hujusce propositionis dividi potest angulus
8. quoque in partes 4. 8. 16, &c, singulas partes iterum bisecando.

PROP. X. PROB.

Fig. 23.

DAtam rectam finitam (AB) secare bifariam.

- (1) *per prop.* Super datâ AB constituatur triangulum æquilaterum
1. ACB (1). Bisecetur angulus ACB rectâ CD (2). Hæc
(2) *per prop.* bisecabit datam in puncto D .
9.

Nam

Nam in triangulis ACD, BCD, latera AC & CB æqualia sunt (3), CD vero commune, & anguli ACD, BCD (3) *per const.* æquales (3), ergo bases AD & DB æquantur (4), & proinde data recta AB bisecatur in D. (4) *per prop.* 4.

PROP. XI. PROB.

D *Ata rectæ lineæ (AB) perpendicularem ducere Fig. 24. a puncto (C) in ipsâ dato.*

Ex utrinque puncti dati C sumantur æquales CD & CE (1). Super DE constituatur triangulum æquilaterum DFE. Ducatur FC & erit datæ rectæ perpendicularis. (1) *per prop.* 3.

Nam in triangulis DFC, EFC, latera DF & DC lateribus EF & EC æqualia sunt (2), & CF commune, ergo anguli DCF & ECF oppositi æqualibus lateribus DF & EF (3) *per const.* æquales sunt (3), & proinde FC perpendicularis est rectæ datæ AB (4). *prop. 8.* (4) *per def.* 11.

Schol. Eâdem methodo a termino datæ rectæ excitatur perpendicularis, si primo recta producat.

PROP. XII. PROB.

A *Puncto dato (C) extra rectam infinitam datam Fig. 25. (AB) perpendicularem ad eam ducere. Vide N.*

Centro C describatur circulus secans datam rectam in E & F. Bisecetur EF (1) & a dato puncto ad punctum (1) *per bisectionis* ducatur CD, erit datæ rectæ perpendicularis. *prop. 10.*

Ducantur enim CE & CF, & in triangulis EDC & FDC erunt latera EC & FC (2), & ED & FD (3) æqualia, & CD commune, ergo anguli EDC & FDC oppositi æqualibus lateribus EC & FC sunt æquales (4), & proinde DC perpendicularis est rectæ datæ AB (5). (2) *per def. 15.* (3) *per Const.* (4) *per schol. prop. 8.* (5) *per defin. 11.*

PROP. XIII. THEOR.

Fig. 26.
Vide N.

CUm recta (AB) super rectâ (DC) insistens angulos fecerit, aut duos rectos, aut angulos æquales duobus rectis facit.

(1) per
def. 11.

Si recta AB rectæ DC perpendicularis sit, anguli ABC & ABD recti sunt (1).

Si vero non, ducatur BE ipsi DC perpendicularis, & patet angulos CBA & ABD , angulis CBE & EBD , & ergo duobus rectis, æquales esse.

Cor. 1. Si plures rectæ, eidem rectæ ad idem punctum insistant, faciunt angulos duobus rectis æquales.

Cor. 2. Duæ rectæ interfecantes faciunt angulos quatuor rectis æquales.

Cor. 3. Si plures rectæ in eodem puncto sese intersecent, omnes anguli æquales sunt quatuor rectis.

PROP. XIV. THEOR.

Fig. 27.

SI ad idem punctum rectæ cujuscvis (AB) & ad diversas partes ejus, duæ rectæ (CB & DB) concurrentes, angulos cum ipsâ fecerint duobus rectis æquales, rectæ ipsæ (CB & DB) erunt sibi invicem in directum.

Non enim, sed fit BE ipsi CB in directum, & erunt anguli CBA & ABE duobus rectis æquales (1), sed CBA & ABD æquales sunt duobus rectis (2) ergo CBA & ABE ipsi CBA & ABD æquales sunt, communis desumatur CBA , & ABE ipsi ABD æqualis erit, pars toti, quod absurdum. proinde BE non est in directum ipsi CB , & similiter demonstrari potest nullam aliam præter BD ei in directum esse; in directum igitur est BD ipsi BC .

PROP. XV. THEOR.

SI due rectæ (AB & CD) se secuerint, erunt anguli verticales æquales ($\angle CEA$ ipsi $\angle BED$, & $\angle CEB$ ipsi $\angle AED$). Fig. 28.

Quoniam enim recta CE rectæ AB insistit, angulus AEC cum $\angle CEB$ æqualis est duobus rectis (1); & quoniam recta BE rectæ CD insistit, angulus (1) per $\angle CEB$ cum $\angle BED$ æqualis est duobus rectis (1); ergo $\angle AEC$ *prop. 13.* & $\angle CEB$ simul ipsis $\angle CEB$ & $\angle BED$ simul æquantur (2) (2) *per ax.* communis desumatur $\angle CEB$, & erit $\angle AEC$ ipsi $\angle BED$ æqualis (3). similiter demonstrari potest $\angle CEB$ & $\angle AED$ (3) *per ax.* esse æquales. 3.

PROP. XVI. THEOR.

SI trianguli (BAC) latus quodvis (BC) producat, erit angulus externus (ACD) alterutro ex internis remotis (A vel B) major. Fig. 29.

Bifecetur latus AC in E (1), & ducta BE producat (1) *per* ut EF ipsi BE æqualis sit (2), & ducatur CF . *prop. 10.*
In triangulis CEF & AEB latera CE & EF lateribus (2) *per* AE & EB æqualia sunt (3), & angulus CEF angulo (3) *per const.* AEB æqualis (4), ergo anguli ECF & A æquantur (5), (4) *per prop.* & proinde $\angle ACD$ ipso A major est. Similiter, produ- 15.
cendo AC , demonstrari potest angulum BCG angulo B (5) *per prop.* majorem esse, & ergo $\angle ACD$, ipsi $\angle BCG$ æqualem (6) 4.
angulo B majorem esse. (6) *per*

Cor. 1. Si a puncto B ad rectam ED ducantur duæ rectæ, altera BA perpendicularis altera vero BC non, cadet perpendicularis ad partes anguli acuti. *prop. 15.*

Sit enim, si fieri potest, BA , ad partes anguli obtusi BCE , rectæ ED perpendicularis, & erit angulus BAE angulo BCE minor (1), sed $\angle BAE$ ipso $\angle BCE$ major est (1) *per* (2), quod absurdum. non cadit ergo BA ad partes anguli obtusi, ergo cadit ad partes anguli acuti. *def. 12.*

Cor. 2. Duæ perpendiculares duci non possunt ex eodem puncto B ad eandem rectam ED . Sint enim, si fieri potest, BA & BC ambæ perpendiculares rectæ ED , (2) *per*
prop. 16.

(1) *per ax.* & angulus BAE angulo BCE æqualis erit (1), sed & ipso major (2), quod absurdum. rectæ ergo BA & BC non sunt ambæ perpendiculares.

11.
16.

PROP. XVII. THEOR.

Fig. 31.

DUO quivis anguli trianguli (*BAC*) simul, minores sunt duobus rectis.

Producatur enim latus quodvis BC, & erit ACD major alterutro A vel B (1), ergo ACB cum alterutro A vel B minor est ipso ACB cum ACD, & ergo minor duobus rectis (2). Similiter, producto BC versus B, demonstrari potest angulum ABC cum angulo A minorem esse duobus rectis. Ergo duo quivis anguli minores sunt duobus rectis.

(1) *per prop.*
16.
(2) *per prop.*
13.

Cor. Si in triangulo quovis unus angulus fit obtusus vel rectus, erunt reliqui acuti. Et si duo anguli sint æquales sunt ambo acuti.

PROP. XVIII. THEOR.

Fig. 32.

SI in triangulo quovis (*BAC*) unum latus (*AC*) alio (*AB*) majus sit, erit angulus isti majori lateri oppositus, major angulo qui minori lateri opponitur.

A latere majore AC abscindatur AD lateri minori æqualis (1) & contermina, & ducatur BD.

(1) *per prop.*
3.

Quoniam triangulum BAD isosceles est (2), anguli ABD & ADB æquales sunt (3), sed ADB major est angulo interno ACB (4), ergo ABD major est angulo ACB, & proinde ABC ipso ACB major est. ABC vero lateri majori AC, & ACB lateri minori AB opponitur.

(2) *per*
const.
(3) *per prop.*
5.
(4) *per prop.*
16.

PROP. XIX. THEOR.

Fig. 32.

SI in triangulo quovis (*BAC*) angulus unus (*B*) alio (*C*) major sit, erit latus (*AC*) isti majori angulo oppositum, majus latere (*AB*) quod minori angulo opponitur.

Est

Est enim latus AC aut æquale, aut minus aut majus ipso AB.

Non est æquale ipsi AB, nam si fuerit anguli B & C (1) per prop. 5. forent æquales (1), contra hypothesim.

Non est minus ipso AB, nam si fuerit angulus B angulo C minor foret, (2) per prop. 18. contra hypothesim.

Quoniam ergo latus AC nec æquale est nec minus latere AB, est ipso majus.

Cor. Si ab eodem puncto B ad eandem rectam ED Fig. 33. ducantur duæ rectæ BC & BA, altera BC perpendicularis altera vero non, erit BC minor ipsâ BA.

Nam in triangulo ABC quoniam angulus BCA rectus est, erit BAC acutus (1), ergo BC angulo minori opponitur & proinde minor est (2) quam BA quæ majori opponitur. (4) per cor. prop. 17. (2) per prop. 19.

PROP. XX. THEOR.

IN triangulo (BAC) duo latera quomodocunque sumpta (BA & AC) reliquo (BC) majora sunt. Fig. 34. Vide N.

Bisecetur angulus BAC, & quoniam angulus externus BDA interno DAC major est (1), BAD vero ipsi DAC æquatur (2), est BDA ipso BAD major, & proinde latus BA latere BD majus (3), similiter latus AC ipso CD majus est, duo ergo BA, AC majora sunt duobus BD, DC, seu ipso BC. Et sic bisecto quovis alio angulo, latera circa ipsum reliquo majora esse demonstrantur. (1) per prop. 16. (2) per const. (3) per prop. 19.

PROP. XXI. THEOR.

SI a puncto quovis (D) intra triangulum (BAC) ducantur duæ rectæ (DB & DC) ad terminos lateris cujuscvis (BC), erunt hæ reliquis duobus trianguli lateribus (AB & AC) minores, angulum vero majorem continebunt. Fig. 35.

Producatur BD ad E, & quoniam in triangulo BAE latera BA & AE reliquo BE majora sunt (1), utrinque addito EC erunt latera BA & AC ipsis BE & EC majora, sunt vero in triangulo EDC latera duo DE & EC reliquo DC majora (1), ergo, si utrinque addatur BD, erunt BE

BE & EC ipsis BD & DC majora, sunt vero BA & AC ipsis BE & EC majora, ergo BA & AC ipsis BD & DC majora sunt.

(2) *per prop.* 16. Quoniam angulus externus BDC, interno DEC major est (2), angulus vero DEC similiter angulo interno BAE major est (2), erit angulus BDC ipso BAE major.

P R O P. XXII. P R O B.

Fig. 36.
Vide N.

D Atis tribus rectis (A, B & C), quarum duæ quomodocunque sumptæ reliquæ sunt majores, triangulum constituere cujus latera ipsis datis sint æqualia.

Ad punctum quodvis D ponatur recta DE æqualis datæ A, & ad idem punctum ponatur DG æqualis datæ B, & ad punctum E ponatur EF datæ C æqualis (1).

(1) *per prop.* 2. Centro D, intervallo DG describatur circulus, & centro E intervallo EF describatur circulus (2). Ab intersectione K ducantur KD & KE.

(2) *per*
post. 3.

Patet latera DE, DK & KE trianguli DKE, datis A, B & C esse æqualia.

Cor. Hinc dato triangulo constitui potest triangulum æquale, constituendo scilicet triangulum cujus latera dati lateribus æqualia sunt, hoc enim dato erit æquale (1).

P R O P. XXIII. P R O B.

Fig. 37.

A D datam rectam (BE) & ad datum in eâ punctum (B) angulum constituere dato (C) æqualem.

Ducatur recta FD secans utcunque crura anguli dati C, & triangulo DCF constituatur æquilaterum EBA cujus latera AB & EB ad punctum datum B concurrentia sint æqualia cruribus FC & DC dati anguli C (1). Erit angulus B angulo dato C æqualis.

(1) *per prop.* 22.

Nam quoniam triangula DCF, & EBA æquilatera sunt, anguli C & B æqualibus lateribus DF & EA oppositi, sunt æquales (2).

(2) *per*
prop. 8.

PROP. XXIV. THEOR.

SI duo triangula (BFD , BAC) duo latera duobus *Fig. 38.*
æqualia habeant, alterum alteri (FB ipsi AB & FD ipsi AC), ex angulis vero sub istis lateribus unus
(A) altero (F) major sit, erit latus (BC) angulo isti
majori oppositum, majus latere (BD) angulo minori
opposito.

Ad punctum A & cum latere non majore AB con-
 stituatur angulus BAG angulo BFD æqualis (1), & fiat
 AG ipsi FD æqualis (2), & ducantur BG & GC .

Quoniam rectæ AG & AC æquales sunt (3), erunt
 anguli ACG & AGC æquales (4). Sed BGC major est
 quam AGC , ergo & major quam ACG & proinde major
 ipso BCG .

In triangulo igitur BGC , angulus BGC angulo BCG
 major est & proinde latus BC latere BG majus (5),
 BG vero ipsi BD æquatur (6), & ergo BC ipso BD majus
 est.

PROP. XXV. THEOR.

SI duo triangula (BAC & EFD) duo latera duobus *Fig. 39.*
habeant æqualia (BA ipsi EF & AC ipsi FD)
reliquum vero latus (BC) majus reliquo (ED), erit
angulus (A) isti majori lateri oppositus, major angulo
(F) qui minori lateri opponitur.

Angulus A vel æqualis est ipsi F , vel minor eo, vel
 major.

Non est æqualis, nam si fuerit, latus BC lateri ED
 æquale esset (1), contra hypothesim.

Non est minor, nam si fuerit, latus BC latere ED mi-
 nus esset (2), contra hypothesim.

Quoniam ergo angulus A nec æqualis est angulo F ,
 nec ipso minor, major erit.

PROP. XXVI. THEOR.

Fig. 40.
Vide N.

SI duo triangula (BAC , DEF) habeant duos angulos duobus æquales (B ipsi D & C ipsi F); & unum latus uni lateri æquale, vel quod inter æquales angulos est, (ut BC ipsi DF), vel quod æqualibus angulis opponitur (ut BA ipsi DE), reliqua latera & reliqui anguli æquantur.

Ponatur primo latus BC lateri DF æquale; tunc latus BA lateri DE quoque æquale erit.

Non enim, sed sit alterutrum ex iis BA majus, & abscindatur recta BG minori DE æqualis, & ducatur CG .

In triangulis GBC , EDF , latera GB , BC lateribus ED , DF æqualia sunt (1), & angulus B angulo D æquatur (2), ergo anguli BCG & F æquales sunt (3), sed angulus BCA ipsi F æqualis est (4), ergo BCG ipsi BCA æquatur (5), quod absurdum; ergo neutrum ex lateribus BA & DE altero majus est, æqualia igitur sunt BA & DE , sed & æqualia sunt BC & DF (6), & anguli B & D æquantur (6) reliquum igitur latus AC reliquo lateri EF æquatur, & quoque reliquus angulus A reliquo E (7).

Jam ponatur, latera BA & DE , æqualibus angulis C & F opposita, æqualia esse, & erunt latera BC & DF quoque æqualia.

Non enim, sed sit alterutrum ex iis BC majus, & abscindatur recta BH minori DF æqualis, & ducatur AH .

In triangulis ABH , EDF , latera AB , BH , lateribus ED , DF æqualia sunt (8), & angulus B angulo D æquatur (9), ergo anguli AHB & F æquales sunt (10), sed angulus C ipsi F æqualis est (11), ergo AHB ipsi C æqualis est (12), quod fieri nequit (13), ergo neutrum ex lateribus BC & DF altero majus est, æqualia igitur sunt BC & DF , sed & æqualia sunt BA & DE , (14) & anguli B & D æquantur (14), reliquum igitur latus AC reliquo EF æquatur, & quoque reliquus angulus A reliquo E (15).

(8) per const.
& hypotb.
(9) per
hypotb.
(10) per
prop. 4.
(11) per
hypotb.
(12) per ax.
1.
(13) per
prop. 16.
(14) per
hypotb.
(15) per
prop. 4.

Schol.

Schol. Patet triangula ipsa quoque æqualia esse.

Cor. 1. In isoscele triangulo ABC recta BD a vertice *Fig. 41.*
perpendicularis in basem, bifecat & basem & angulum ver-
ticalem.

Nam in triangulis ABD, CBD anguli A & ADB
angulis C & CDB æquales sunt (1), latus vero BD, (1) *per by-*
æqualibus angulis A & C oppositum, commune est, ergo *potb.*
anguli ABD, CBD æquales sunt, & quoque latera AD &
DC (2); & igitur bifecantur angulus verticalis & basis. (2) *per prop.*

Cor. 2. Patet ex prop. 4. hujusce libri, rectam bise- 26.
cantem angulum verticalem isoscelis, & bifecare basem &
ei esse perpendicularem; & ex prop. 8. rectam ab angulo
verticali bifecantem basem, ei perpendicularem esse, &
angulum verticalem bifecare.

PROP. XXVII. THEOR.

SI recta (EF) secans duas rectas (AB & CD) alter- *Fig. 42.*
nos angulos æquales fecerit (AEF ipsi EFD) erunt *Vide N.*
rectæ istæ parallelæ.

Non enim, sed concurrant si fieri potest in G, & an-
gulus externus AEF trianguli EGF, interno EFG major
est (1), sed & ipsi æqualis est (2), quod absurdum; (1) *per prop.*
non ergo concurrunt rectæ AB & CD ad partes BD. 16.
Similiter demonstrari potest eas non concurrere ad partes (2) *per by-*
AC. Quoniam ergo ad neutras partes concurrunt, sunt *potb.*
parallelæ (3). (3) *per def.*
28.

PROP. XXVIII. THEOR.

SI recta linea (EF) rectas duas (AB & CD) secans, *Fig. 43.*
fecerit externum angulum interno opposito & ad
easdem partes æqualem (EGA ipsi GHC vel EGB ipsi
GHD); vel internos & ad easdem partes (AGH &
CHG, vel BGH & DHG) duobus rectis æquales;
rectæ istæ erunt parallelæ.

Sint primo EGA & GHC æquales, & quoniam EGA
ipsi BGH æquatur (1), erunt GHC & BGH æquales, (1) *per prop.*
& sunt alterni, ergo rectæ AB & CD sunt parallelæ (2). 15.
D Similiter (2) *per prop.*
27.

Similiter demonstrari potest si æquales sint EGB & GHD.

Jam sint AGH & CHG simul duobus rectis æquales, & quoniam GHD & CHG duobus rectis quoque sunt æquales (3), erunt AGH & CHG simul ipsis GHD & CHG simul æquales (4), communis auferatur CHG & erit AGH ipsi GHD æqualis, sed sunt alterni, ergo rectæ AB & CD sunt parallelæ (5). Similiter demonstrari potest si BGH & DHG æquales sint duobus rectis.

(3) per prop.

13.

(4) per ax.

1.

(5) per prop.

27.

PROP. XXIX. THEOR.

Fig. 44.

RECTA linea (EF) rectas parallelas (AB & CD) secans, efficiet angulos alternos æquales (AGH ipsi GHD, & CHG ipsi HGB); & angulum externum interno opposito æqualem (EGA ipsi GHC, & EGB ipsi GHD); & quoque angulos internos & ad easdem partes (AGH & CHG, BGH & DHG) duobus rectis æquales.

Primo. anguli alterni AGH & GHD æquales sunt. Nam si non, sit alter eorum AGH major, & addito utrinque BGH, erunt AGH & BGH simul ipsis BGH & GHD majores, sed AGH & BGH duobus rectis æquantur (1), ergo BGH & GHD duobus rectis minores sunt & proinde rectæ AB & CD conveniunt ad partes BD (2), sed sunt parallelæ (3), & ergo non conveniunt, quod absurdum; ergo neuter ex angulis AGH & GHD altero major est, sunt proinde æquales. similiter demonstrari potest BGH & GHD æquales esse.

(1) per prop.

13.

(2) per ax.

12.

(3) per by-

potb.

Secundo. Angulus externus EGB interno GHD æqualis est. EGB enim angulo AGH æqualis est (4), & AGH alterno GHD æquatur (5), ergo EGB ipsi GHD æqualis est. Similiter demonstrari potest EGA & GHC æquales esse.

(4) per prop.

15.

(5) per par.

præc.

Tertio. Anguli interni ad easdem partes, BGH & GHD duobus rectis æquales sunt. Nam quoniam anguli alterni GHD & AGH æquantur (5), addito utrinque BGH, erunt BGH, & GHD ipsis BGH & AGH æquales, & ergo duobus rectis æquantur (6). Similiter demonstrari potest angulos AGH & GHC duobus rectis æquales esse.

(6) per prop.

13.

PROP.

PROP. XXX. THEOR.

SI dua rectæ (AB , CF) ad eandem rectam (DN) ^{Fig. 45.}
parallela sint, erunt inter se parallela. ^{Vide N.}

Secentur enim rectâ GP . Angulus externus GLB in- ^{(1) per prop.}
terno LON æqualis est (1), & similiter LON angulo OPF ^{29.}
æquatur, ergo GLB ipsi OPF æqualis est (2), & proinde ^{(2) per ax.}
rectæ AB & CF sunt parallelæ (3). ^{(3) per prop.}
^{28.}

PROP. XXXI. PROB.

AD datam rectam (AB), per datum, extra eam, ^{Fig. 46.}
punctum (C) ducere parallelam.

Ducatur recta CF secans utcumque datam AB . Ad
punctum C & cum rectâ CF constituatur angulus FCE
angulo AFC æqualis (1), ad partes vero contrarias rectæ ^{(1) per prop.}
 CF ; erit DE rectæ datæ AB parallela. ^{23.}

Nam recta FC secans rectas DE & AB facit angulos
alternos ECF & AFC æquales, & proinde ipsæ rectæ
sunt parallelæ (2). ^{(2) per prop.}
^{27.}

PROP. XXXII. THEOR.

IN omni triangulo si producatür latus quodvis (AB) ^{Fig. 47.}
externus angulus (FBC) duobus internis remotis (A
& C) æqualis est. Tres vero anguli interni duobus
rectis æquantur.

Per B ducatur BE parallela ad AC (1). ^{(1) per prop.}

Angulus FBE æqualis est angulo interno remoto A (2), ^{31.}
angulus vero EBC alterno C æqualis est (2), ergo totus ^{(2) per prop.}
angulus FBC , duobus A & C æquatur. ^{29.}

Angulus ABC , cum FBC duobus rectis æqualis est (3), ^{(3) per prop.}
sed FBC duobus A & C æquatur (4), ergo angulus ABC ^{13.}
cum duobus A & C , rectis duobus angulis æqualis ^{(4) per par.}
est. ^{præc.}

Cor. 1. Si in triangulo unus angulus sit rectus, reliqui
duo simul æquales sunt recto; & angulus qui reliquis
duobus æquatur est rectus.

D 2

Cor.

Cor. 2. Si in duobus triangulis duo anguli duobus æquales sint, erunt reliqui quoque æquales.

Cor. 3. In triangulo rectangulo isoscele, singulus angulus ad basem semissis est recti.

Cor. 4. In triangulo æquilatelo singulus angulus tertia pars est duorum rectorum.

Fig. 48.
Vide N.

(1) per cor.
prec.

Fig. 49.
Vide N.

Cor. 5. Hinc trifecari potest angulus rectus FAC; sumatur enim pars quævis cruris alterutrius AC & super ipsâ constituitur triangulum æquilaterum CBA cujus angulus CAB bisecetur rectâ AE, & quoniam CAB tertia pars est duorum rectorum (1), æqualis erit duabus tertiis partibus unius recti & ergo BAF tertia pars est recti & proinde ipsis BAE & EAC æqualis.

Cor. 6. Omnes anguli simul cujuscunque figuræ rectilineæ ABCDE, æquantur bis tot rectis, demptis quatuor, quot sunt latera figuræ.

(1) per prop.
32.
(2) per cor.
3. Prop. 13.

Assumatur enim punctum F intra figuram & ducantur rectæ FA, FB, FC, FD & FE. Tot constituentur triangula quot sunt latera figuræ, et ergo omnes eorum anguli æquales erunt bis tot rectis quot sunt latera figuræ (1). Ex his demantur quatuor recti pro angulis ad punctum F (2) & reliqui, scilicet anguli figuræ, æquales erunt bis tot rectis, demptis quatuor, quot sunt latera figuræ.

Fig. 50.

(1) per prop.
13.

(2) per cor.
prec.

Cor. 7. Omnes anguli externi cujuscunque figuræ rectilineæ æquales sunt quatuor rectis. Singulus enim externus cum interno adjacente æqualis est duobus rectis (1), ergo omnes externi cum omnibus internis æquales sunt bis tot rectis quot sunt latera figuræ. Sed interni cum quatuor rectis æquales sunt bis tot rectis quot sunt latera figuræ (2), auferantur utrinque anguli interni & erunt anguli externi æquales quatuor rectis.

PROP. XXXIII. THEOR.

Fig. 51.

RECTÆ (AC & BD) jungentes terminos adjacentes æqualium & parallelarum (AB & CD) sunt ipsæ æquales & parallelæ.

(1) per hyp.
oth.

(2) per prop.
29.
(3) per prop.
4.

Ducatur enim diagonalis AD, & in triangulis CDA, BAD latera CD & BA æqualia sunt (1), AD verò commune, & angulus CDA angulo alterno BAD æqualis (2), ergo rectæ AC & BD æquantur (3), & anguli CAD & BDA æquales sunt (3). ergo recta AD secans rectas AC

AC & BD facit angulos alternos æquales & proinde rectæ
AC & BD sunt parallelæ (4).

(4) per prop.
27.

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammi (AD) latera opposita (AB & CD, Fig. 51.
AC & BD) & anguli oppositi (A & D, C & B) Vide N.
æquantur, ipsumque a diagonali bifecatur.

Nam in triangulis CDA, BAD, anguli CDA &
BAD, CAD & BDA æquantur, sunt enim alterni (1),
latus vero AD inter angulos æquales commune est, ergo
latera CD & CA ipsis AB & BD æqualia sunt (2), & tri-
angulum CDA triangulo BAD æquale est (3), & anguli
quoque ACD & ABD æquantur (2), & quoniam ACD
cum CAB duobus rectis æqualis est (3) & ABD cum
CDB quoque duobus rectis æqualis est, si auferantur
utrinque æquales ACD & ABD erunt reliqui CAB &
CDB quoque æquales.

Cor. 1. In parallelogrammo quovis si unus angulus
sit rectus, reliqui erunt recti.

Adjacens enim est rectus quoniam cum recto æqualis
est duobus rectis (1), & oppositi sunt recti quoniam hisce
rectis æquantur (2).

Cor. 2. Si duo parallelogramma unum angulum uni
æqualem habeant, erunt quoque reliqui æquales, anguli
enim qui hisce opponuntur ipsis æquales sunt (1) & ergo
inter se æquantur; anguli vero iis adjacentes, quoniam
cum ipsis æquales sunt duobus rectis (2) sunt quoque inter
se æquales.

PROP. XXXV. THEOR.

Parallelogramma (BD & BF) super basi eadem &
in iisdem parallelis, æqualia sunt.

Fig. 52, 53,
& 54.
Vide N.

Quoniam rectæ AD & EF æquales sunt eidem rectæ
BC (1), sunt inter se æquales, ergo, addita DE utrinque
in casu fig. 53, & subtracta utrinque in casu fig. 54, rectæ
AE & DF æquantur, æquantur quoque rectæ BA &
BE rectis CD & CF (2), ergo triangula BEA & CFD
sunt æqualia (3), subtracto vero triangulo BEA a
quadrilatero

prop. 8.

quadrilatero BAFC, reliquum est parallelogrammum BF, & subtracto triangulo CFD ab eodem quadrilatero, reliquum est parallelogrammum BD, sunt igitur parallelogramma BD & BF æqualia (4).

(4) per ax.
3.

PROP. XXXVI. THEOR.

Fig. 55. **P**arallelogramma (BD & EG) super basibus æqualibus, & in iisdem parallelis, æqualia sunt.

(1) per hyp. &
 34.
 (2) per hyp.
 33.
 (3) per prop.
 33.
 (4) per prop.
 35.
 (5) per ax.
 I.
 Ducantur enim BF & CG, & quoniam BC & FG eidem EH æquales sunt (1) inter se sunt æquales, sed & parallelæ sunt (2), ergo BF & CG ipsas jungentes sunt parallelæ (3), & BG parallelogrammum est, proinde utrique BD & EG æquale est (4), & ergo sunt ipsa BD & EG inter se æqualia (5).

PROP. XXXVII. THEOR.

Fig. 56. **T**riangula (BAC & BDC) super basi eadem & in iisdem parallelis, æqualia sunt.

Ducantur enim per punctum C, rectæ CE & CF,
 (1) per prop.
 31.
 (2) per prop.
 35.
 (3) per prop.
 34.
 (4) per ax.
 7.
 rectis BA & BD parallelæ (1), & parallelogramma BAEC, BDFC æqualia erunt (2), triangula vero BAC & BDC sunt ipsorum dimidia (3) & ergo sunt quoque æqualia (4).

PROP. XXXVIII. THEOR.

Fig. 57. **T**riangula (BAC & HDE) super basibus æqualibus & in iisdem parallelis, æqualia sunt.

Ducantur enim per puncta C & E rectæ CF & EG,
 (1) per prop.
 31.
 (2) per prop.
 36.
 (3) per prop.
 34.
 (4) per ax.
 7.
 rectis BA & HD parallelæ (1) & parallelogramma BAFC, HDGE æqualia erunt (2), triangula vero BAC & HDE sunt ipsorum dimidia (3), & ergo sunt quoque æqualia (4).

PROP.

PROP. XXXIX. THEOR.

Triangula æqualia (BAC & BDC) super eadem Fig. 58.
 basi & ad easdem partes, sunt in iisdem paral-
 lelis.

Si enim AD non sit parallela ad BC , ducatur per A recta
 AF ipsi BC parallela secans alterutrum latus BD trianguli
 BDC in puncto E diverso a vertice, & ducatur CE .

Quoniam AF & BC parallelæ sunt, triangulum BEC
 triangulo BAC æquale est (1), sed BDC ipsa BAC (1) per prop.
 æquale est (2), ergo æquantur BEC & BDC , pars & to-^{37.}
 tum (3), quod absurdum. Non est igitur AF ipsi BC (2) per hy-
 parallela, & similiter nec alia quævis præter ipsam AD , (3) per ax.
 ergo est AD ipsi BC parallela. ^{1.}

PROP. XL. THEOR.

Triangula æqualia (BAC & GDH) super Fig. 59.
 basibus æqualibus & ad easdem partes, sunt in iisdem paral-
 lelis.

Si enim AD non sit parallela ad BH , ducatur per A
 recta AF ipsi BH parallela secans alterutrum latus GD tri-
 anguli GDH in puncto E diverso a vertice, & ducatur
 HE .

Quoniam AF ipsi BH parallela est, & æquantur BC
 & GH , triangulum GEH triangulo BAC æquale est (1), (1) per prop.
 sed GDH ipsi BAC æquale est (2), ergo æquantur GEH ^{38.}
 & GDH , pars & totum (3) quod absurdum. Non est ^{(2) per hy-}
 igitur AF ipsi BH parallela, & similiter nec alia quævis (3) per ax.
 præter ipsam AD , ergo est AD ipsi BH parallela. ^{1.}

PROP.

PROP. XLI. THEOR.

Fig. 60.

SI parallelogrammum (BF) & triangulum (BAC) basem habeant eandem, & sint in iisdem parallelis, parallelogrammum trianguli duplum erit.

Ducatur enim CD . Triangulum BDC triangulo BAC (1) per prop. 37. æquale est (1), BF vero trianguli BDC duplum est (2), ergo BF quoque ipsius BAC duplum est.

(2) per prop. 34. Schol. Hinc patet parallelogrammum duplum esse trianguli, si æquales habeant bases & sint in iisdem parallelis.

Fig. 61.

Cor. Si triangulum BAC & parallelogrammum DF sint in iisdem parallelis, trianguli vero basis dupla sit basis parallelogrammi, erit triangulum ipsi parallelogrammo æquale.

Ducatur enim AD , & quoniam triangula BAD , DAC (1) per prop. 38. æqualia sunt (1), est BAC duplum trianguli DAC , parallelogrammum vero DF ipsius DAC duplum est (2), ergo triangulum BAC & parallelogrammum DF æquan- (3) per ax. 6. tur (3).

PROP. XLII. PROB.

Fig. 61.

Dato triangulo (BAC) æquale parallelogrammum constituere, habens angulum dato (O) æqualem.

Per A ducatur AF ipsi BC parallela. Ad punctum D & cum recta CD constituatur angulus CDE dato O æqualis. Per C ducatur CF ipsi DE parallela.

Quoniam EF parallela est ipsi DC (1) per conf. 30. (1), $DEFC$ parallelogrammum est (2), & angulum CDE dato O æqualem habet (1). Est vero triangulo BAC æquale quoniam in iisdem parallelis est & basem habet basis trianguli dimidiam (3) per cor. prop. 41. (3).

PROP.

PROP. XLIII. THEOR.

IN parallelogrammo (AC) complementa (AK & KC) Fig. 62.
eorum quæ circa diagonalem sunt (FH & GE),
æqualia sunt.

Nam quoniam triangula BAD, BCD æqualia sunt (1), (1) per prop.
& triangula BGK, KFD ipsis BEK, KHD quoque 34.
æquantur (1), erunt, desumptis his æqualibus BGK &
KFD, BEK & KHD, ab æqualibus BAD & BCD, re-
liqua, scilicet parallelogramma AK & KC æqualia.

Cor. Parallelogramma OF & EK circa diagonalem Fig. 63.
quadrati AD, sunt quadrata.

Nam quoniam triangulum BAC isosceles est, angulus
vero ad A rectus, erit ABC semirectus (1), cum igitur (1) per cor.
in triangulo OBG angulus ad O rectus est, recto enim, 3. prop. 32.
BAC externus est (2), angulus vero OBG semirectus, (2) per prop.
erit quoque OGB semirectus & ergo OG & OB æquan- 29.
tur (3), patet igitur OF esse quadratum. Et similiter (3) per prop.
demonstrari potest EK quadratum esse. 6.

PROP. XLIV. PROB.

AD datam rectam (OS) parallelogrammum appli- Fig. 64.
care, dato triangulo æquale, & habens angu- Vide N.
lum dato (V) æqualem.

Sit primo datum triangulum GHO, cujus unum la-
tus GO datæ OS est in directum.

Bisecetur GO & constituatur parallelogrammum RC
æquale dato triangulo & habens angulum BRO dato V
æqualem (1); per S ducatur SD, alterutri OC vel (1) per prop.
RB parallela, & ipsi occurrat BC producta in D, du- 42.
catur DO & ipsi occurrat BR producta in A; per A
ducatur AL alterutri RS vel BD parallela & producan-
tur CO & DS ad F & L. Erit parallelogrammum FS
datæ OS applicatum, æquale dato triangulo GHO &
habet angulum OFL dato V æqualem.

Quoniam parallelogrammum est ABDL (2), in ipso (2) per const.
vero FS & RC complementa sunt eorum circa diago- (3) per prop.
nalem, erit FS ipsi RC æquale (3), sunt vero RC & 43.
datum triangulum GHO, æqualia (4), ergo FS ipsi (4) per const.
E GHO

(5) *per ax.* GHO æquatur (5). Et quoniam angulus OFL interno
1. BAF æqualis est (6), BAF vero externo BRO æqualis
(6) *per prop.* (6), æquantur OFL & BRO , sed æquantur quoque
29. BRO & datus V (7), ergo OFL & datus V æquales
(7) *per const.* sunt.

Jam vero detur triangulum KRO , cujus nullum latus
data rectæ OS in directum est, & tunc producatu-
ta OS , & super parte productâ OG constituatur trian-
(8) *per cor.* gulum GHO ipsi KRO æquale (8), & applicetur datæ
prop. 22. OS parallelogrammum ipsi GHO æquale (9), erit dato
(9) *per par.* KRO quoque æquale ut patet.
præc.

P R O P. XLV. P R O B.

Fig. 65.
Vide N.

Data figura rectilinea (ABCE) æquale paral-
lelogrammum constituere habens angulum dato
(H) æqualem.

Resolvatur data figura rectilinea in triangula.

(1) *per cor.* Triangulo BDA æquale constituatur IPS (1), & ipsi
prop. 22. IPS æquale constituatur parallelogrammum RQ (2),
(2) *per prop.* habens angulum RIQ dato H æqualem. Producatu-
44. VR & ad partem productam constituatur triangulum RKO
triangulo DBC æquale (1), & ipsi æquale constituatur
parallelogrammum XV ad rectam RV & habens angulum
(3) *per prop.* XRV alterutri RIQ vel H æqualem (3), & sic reliquis
44. omnibus triangulis in quæ data figura resolvitur constitu-
antur parallelogramma æqualia; erit LIQY parallelo-
grammum datæ figuræ rectilineæ ABCDE æquale & ha-
bens angulum LIQ dato H æqualem.

Nam quoniam RV & IQ parallelæ sunt, angulus
(4) *per prop.* VRI cum angulo QIR duobus rectis æqualis est (4),
29. sed VRX ipsi QIR æquatur (5), ergo VRI cum VRX
(5) *per const.* duobus rectis æqualis est (6), proinde IR & RX sunt
(6) *per ax.* in directum (7). Similiter demonstratur RX & XL
2. esse in directum, est ergo IL una recta. Et quoniam
(7) *per prop.* QV parallela est ad IR , est angulus QVR cum IRV
14. æqualis duobus rectis (4), est vero IR ipsi VF paral-
lela & proinde IRV angulo FVR æquatur (4), ergo
 QVR cum FVR duobus rectis æqualis est (6) & pro-
inde QV & FV sunt in directum (7). Similiter demon-
stratur VF & FY esse in directum. Est ergo QY una
(8) *per const.* recta, sed & ipsi IL parallela est (8). Et quoniam LY
& RV eidem XF parallelæ sunt, erit LY ipsi RV paral-
lela

lela (9), sed sunt IQ & RV parallelæ, & ergo LY ipsi IQ parallela est (9). LIQY igitur parallelogrammum (9) *per prop.* est (10), habet vero angulum LIQ dato H æqualem & ^{30.} ipsum est datæ rectilineæ, ABCDE æquale (11). ^{(10) per def.}

Cor. 1. Hinc patet quomodo ad datam rectam applicatur parallelogrammum datæ figuræ rectilineæ æquale & habens angulum dato æqualem, scilicet applicando ^{30.} parallelogrammum primo triangulo æquale ad datam rectam. ^{(11) per conf. & ax.}

Cor. 2. Similiter ad datam rectam applicatur parallelogrammum duobus vel pluribus figuris rectilineis æquale.

Cor. 3. Datis duabus figuris rectilineis invenire licet parallelogrammum differentiæ earum æquale applicando ad eandem rectam & in eodem angulo parallelogramma utrisque æqualia, horum enim differentia parallelogrammum erit datarum differentiæ æquale.

PROP. XLVI. PROB.

A Datâ rectâ (AB) quadratum describere. Fig. 66.

A termino datæ A ducatur AC perpendicularis (1) ^{(1) per sch.} ipsi & æqualis (2). Per C ducatur CD ipsi AB parallela (3) & per B ducatur BD ipsi AC parallela. ACDB ^{(2) per prop.} quadratum est a datâ AB descriptum. ^{(3) per prop.}

Nam quoniam ACDB parallelogrammum est (4), angulus vero A rectus (4) erunt reliqui C, D & B quoque recti (5). Et quoniam AC ipsi AB æquatur (4), ^{(4) per conf.} latera vero CD & DB ipsis AB & AC æqualia sunt ^{(5) per cor.} (6) erunt quatuor latera AB, AC, CD & DB inter se ^{(6) per prop.} æqualia, sed anguli omnes sunt recti, & proinde ACDB ^{(7) per def.} quadratum est (7).

Cor. 1. Quadrata ex rectis æqualibus AD & XS ^{31.} æqualia sunt. Fig. 67.

Ducantur enim diagonales BD & YS, & quoniam ^{(1) per hypoth.} rectæ BA, AD, rectis YX, XS æquales sunt (1) anguli ^{(2) per prop.} vero A & X quoque æquales, triangula BAD, YXS æquantur (2). Ergo quadrata AC & XZ quæ ipso- ^{(3) per prop.} rum dupla sunt (3), æquantur.

Cor. 2. Si duo quadrata AC & XZ æqualia sint, ^{34.} eorum latera erunt æqualia. Fig. 67.

Non

Non enim, sed sit alterutrum ex iis AD majus, & fu-
 (1) *per prop.* matur recta AF ipsi XS æqualis (1), & AE ipsi XY
 3. æqualis & ducatur EF. Triangulum EAF triangulo
 (2) *per prop.* YXS æquale erit (2), sed YXS ipsi BAD æquatur quo-
 4. niam dimidia sunt æqualium quadratorum AC & XZ;
 (3) *per ax.* ergo EAF ipsi BAD æquale est (3), pars toti, quod
 1. absurdum, neutrum igitur AD vel XS altero majus est,
 ergo æquantur.

PROP. XLVII. THEOR.

Fig. 68.

IN omni triangulo rectangulo (*ABC*) quadratum
 ex latere (*AC*) recto angulo opposito, æquale est
 quadratis ex reliquis lateribus (*AB* & *CB*).

Ducatur BE alterutri CF vel AD parallela, & jungan-
 tur BF & AI.

(1) *per ax.* Quoniam anguli ICB & ACF æquales sunt (1), addito
 11. utrinque BCA, erunt ICA & BCF æquales, latera vero
 (2) *per def.* IC, CA, lateribus BC, CF æquantur (2), ergo triangula
 31. ICA & BCF æqualia sunt (3). Parallelogrammum vero
 (3) *per prop.* CZ duplum est trianguli ICA quoniam sunt in iisdem pa-
 4. rallelis CI & AZ, & super eâdem basi CI (4). Et pa-
 (4) *per prop.* rallelogrammum CE duplum est trianguli BCF, quoniam
 41. sunt in iisdem parallelis CF & BE & super eâdem basi
 CF (4). Sunt igitur parallelogramma CZ & CE dupla
 æqualium triangulorum ICA & BCF & proinde ipsa
 (5) *per ax.* æquantur (5). Similiter demonstrari potest AX & AE
 6. æqualia esse. Ergo totum DACF duobus CZ & AX
 æquale est.

Sch. Assumitur AZ ipsi CI parallelam esse & inde
 (1) *et prop.* duas AB & BZ in directum esse. Hoc vero patet (1)
 14. ex angulis CBA & CBZ ex utrinque rectæ CB
 rectis.

Cor. 1. Datis duobus lateribus trianguli rectanguli
 reliquum inveniri potest, est enim radix quadratica sum-
 mæ vel differentię quadratorum ex datis, prout data
 sint latera circa angulum rectum vel non.

Fig. 69.

Cor. 2. Datis quocunque quadratis, unum omnibus
 æquale invenire.

Sint rectæ A, B, & C datorum latera, & constituatur
 angulus rectus FDE, & abscindantur a cruribus ejus rectæ
 (1) *per prop.* DG & DH datis A & B æquales (1), & ducatur GH,
 3. & fu-

& sumantur DI & DK ipsi GH & datæ C æquales, quadratum ex IK quadratis ex A, B & C æquale est. Est enim quadratis ex DI & DK æquale (2), sed quadratum ex DI quadratis ex DG & DH æquatur (2),^{47.} ergo quadratum ex IK æquale est quadratis ex DK, DH & DG, seu ex C, B & A ipsis DK, DH, & DG æqualibus.

Cor. 3. Datis duabus rectis inæqualibus AB & BC, *Fig. 70.* invenire rectam cujus quadratum æquale est excessui quadrati majoris ex datis supra quadratum minoris.

Producatur alterutra ex datis AB & sit pars producta BD alteri datæ BC æqualis (1), centro B intervallo^{(1) per prop.} majoris ex datis describatur semicirculus AEF. Per D^{3.} ducatur DE perpendicularis ipsi AD, sit recta quaesita.

Ducatur enim BE. Quadratum ex BE, seu ex BA ipsi BE æquali, quadratis ex BD & DE æquale est (2),^{(2) per prop.} si ergo a quadrato ex BA auferatur quadratum ex BD^{47.} reliquum erit æquale quadrato ex DE.

Cor. 4. Si ab angulo quovis trianguli ABC cadat *Fig. 71.* recta perpendicularis lateri opposito, erit differentia quadratorum ex lateribus AB & BC circa angulum istum, æqualis differentiæ quadratorum ex segmentis AD & DC, lateris in quod cadit perpendicularis.

Nam quadratum ex latere AB æquatur quadratis ex AD & DB (1); & quadratum ex BC æquatur quadratis ex BD & DC (1; ergo differentia quadratorum ex AB^{47.} & BC æqualis est differentiæ inter summam quadratorum ex AD & DB & summam quadratorum ex CD & DB (2),^{(2) per ax.} seu, ablato communi quadrato ex DB, æqualis est differentiæ inter quadrata ex AD & DC.

Cor. 5. Excessus quadratorum ex lateribus AB & BC, super quadrata ex segmentis conterminis AD & DC reliqui lateris, æquales sunt. Patet enim utrumque excessum æqualem esse quadrato ex perpendiculari BD (1).

(1) per
prop. 47.

PROP. XLVIII. THEOR.

Fig. 72.

SI quadratum ex uno latere (AC) trianguli (ABC) æquale sit duobus simul quadratis ex reliquis lateribus (AB , & BC), angulus (ABC) isti lateri oppositus erit rectus.

- (1) *per scb.* Ad AB unum ex lateribus circa angulum ABC , & ad terminum alterutrum ejus B ducatur perpendicularis BD
prop. 11.
 (2) *per prop.* (1) alteri lateri BC æqualis (2), & jungatur AD .
 3. Quadratum ex AD æquale est quadratis ex AB & BD
 (3) *per prop.* (3), seu ex AB & BC ipsi BD æquali (4), sed quadrata, ex AB & BC æquantur quadrato ex AC (5), ergo quadratum ex AD quadrato ex AC æquale est, & proinde
 47. (4) *per const.*
 (5) *per hypoth.* ipsæ rectæ AD & AC æquales sunt (6). Sed æquantur quoque DE & BC , & latus AB utrique triangulo commune est, proinde triangulum ABC triangulo ABD æquilaterum est & ergo angulus ABC angulo ABD æqualis
 (6) *per cor. 2*
 (7) *per prop.* est (7), sed ABD rectus est (8), ergo est ABC quoque
 8. (8) *per const.* rectus.

E U C L I D I S

ELEMENTORUM.

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri
dicitur a duabus rectis lineis, quæ rectum angu-
lum efficiunt.

II.

Omnis parallelogrammi unumquodque ipsorum quæ
circa diametrum sunt parallelogrammorum (EK vel
OF) una cum duobus complementis (AG & GD) Gno-
mon vocetur.

*Tabula se-
cunda.
Liber secun-
dus. Fig. 6.*

P R O-

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Tabula sec.
Lib. sec.
Figura prima.

SI sint duæ rectæ (A , & BC) quarum altera (BC) secta sit in partes quocunque (BD , DE , EC) erit rectangulum sub ipsis rectis æquale rectangulis sub insectâ (A) & partibus sectæ (BD , DE , & EC).

Ad B erigatur BH perpendicularis ad BC & in eâ sumatur BF ipsi A æqualis, & per F ducatur FL parallela ad BC , & ducantur DG , EK , & CL parallelæ ad BF .

Patet rectangulum BL æquale esse rectangulis BG , DK & EL . Est vero rectangulum BL rectangulum sub A & BC , BF enim ipsi A æqualis est, rectangula vero BG , DK & EL sunt rectangula sub A & BD , sub A & DE & sub A & EC , singulæ enim BF , DG & EK ipsi A æquales sunt (1).
(1) per const. & prop. 34. lib. I.

PROP. II. THEOR.

Vide N.
Fig. 2.

SI recta (AB) secetur utcunque (in C) erit quadratum ex totâ æquale rectangulis sub totâ (AB) & partibus (AC , CB).

(1) per prop. 46. l. 1. Describatur enim ex AB quadratum $ADFB$ (1) & per C ducatur CE ipsi AD parallela.

Quadratum AF æquale est rectangulis AE & CF .

Est vero rectangulum AE rectangulum sub AB & AC quoniam AD ipsi AB æqualis est (2). Et rectangulum

CF est rectangulum sub AB & CB quoniam CE ipsi AB æqualis est (3).
(2) per const. (3) per prop. 34. l. 1.

Aliter.

Fig. 3.

(1) per by-
potb.

(2) per prop.
1. l. 2.

Sumatur recta, X , æqualis ipsi AB . Rectangulum sub X & AB seu quadratum ex AB (1) æquatur summæ rectangulorum sub X & AC & sub X & CB (2) hoc est summæ rectangulorum sub AB & AC & sub AB & CB .

P R O P.

PROP. III. THEOR.

SI recta (AB) secetur utcumque (in C), erit rect- Fig. 4.
angulum sub totâ (AB) & unâ parte (AC)
æquale rectangulo sub partibus (AC & CB) cum
quadrato dictæ partis (AC).

Describatur enim ex AC quadratum $ADFC$, & per
 B ducatur BE parallela ad AD , cui occurrat DF pro-
ducta in E . Rectangulum AE æquatur quadrato $ADFC$
& rectangulo CE .

Est vero rectangulum AE rectangulum sub AC & AB , (1) per const.
 AD enim ipsi AC æqualis est (1); & quadratum $ADFC$, & def. 31.
quadratum est ex AC (2); & rectangulum CE rectangu- lib. 1.
lum est sub AC & CB , CF enim ipsi AC æqualis est (2) per
(3). const. (3) per const.
& def. 31.
lib. 1.

Aliter.

Sumatur X ipsi AC æqualis. Rectangulum sub X & Fig. 5.
 AB æquatur summæ rectangulorum sub X & AC & sub
 X & CB (1). Est vero rectangulum sub X & AB , rec- (1) per prop.
tangulum sub AC & AB , & rectangulum sub X & AC 1. lib. 2.
quadratum est ex AC , & rectangulum sub X & CB est
rectangulum sub AC & CB .

PROP. IV. THEOR.

SI recta (AB) secetur utcumque (in O), erit qua- Fig. 6.
dratum ex totâ æquale quadratis ex partibus &
duplo rectangulo sub partibus.

Describatur ex AB quadratum $ACDB$, & ducatur CB ,
& per O ducatur OK parallela ad AC & secans CB in
 G , & per G ducatur EF parallela ad AB .

Quadratum $ACDB$, quadratis EK & OF cum rect- (1) per const.
angulis AG & GD , æquale est. & cor. p. 43.
lib. 1.

Est vero OF quadratum ex OB (1); & quoniam EG lib. 1.
ipsi AO æqualis est (2), EK quadratum est ex AO ; (2) per const.
Et quoniam OG & OB æquantur (3), est AG rectan- & prop. 34.
l. 1.
gulum sub partibus AO & OB , est vero GD ipsi AG (3) per def.
F æquale 34. lib. 1.

(4) *per prop.* æquale (4), ergo AG & GD simul æquantur duplo
43. l. 1. rectangulo sub partibus,

Aliter.

Fig. 7. Quadratum ex AB æquatur summæ rectangulorum
(1) *per prop.* sub AB & AO & sub AB & BO (1). Rectangulum
2. l. 2. vero sub AB & AO æquatur summæ rectanguli sub AO
(2) *per prop.* & OB & quadrati ex AO (2), & rectangulum sub AB
3. l. 2. & BO æquatur summæ rectanguli sub AO & OB &
quadrati ex OB. Ergo summa rectangulorum sub AB
& AO & sub AB & BO (feu quadratum ex AB) æqua-
tur summæ quadratorum ex AO & OB, & dupli rectan-
guli sub AO & OB.

Cor. Hinc patet quadratum ex dimidiâ rectæ cujus-
vis partem esse quartam quadrati ex tota, rectâ enim bi-
sectâ, rectangulum sub partibus æquatur quadrato ex
dimidiâ.

PROP. V. THEOR.

Fig. 8.

SI recta quævis (AB) secetur in partes æquales (in
C), & in partes inæquales (in D), erit rectangu-
lum sub partibus inæqualibus (AD & DB) una cum
quadrato ex parte intermediâ (CD), æquale quadrato
quod fit ex dimidiâ (CB).

Describatur ex CB quadratum CKMB, & ducatur
KB, & per D ducatur DL parallela ad CK & secans KB
in G, & per G ducatur HGE parallela ad AB, cui oc-
currat AE ducta per A parallela ad CK.

(1) *per by-
posb.* Quoniam AC & CB æquales sunt (1), rectangula AF
(2) *per prop.* & CH æquantur (2), rectangula vero CG & GM æqua-
36. l. 1. lia sunt (3), ergo rectangulum AG Gnomoni CHL æquale
(3) *per prop.* est (4), addatur utrinque quadratum FL, & erit rectan-
43. l. 1. gulum AG cum quadrato FL æquale quadrato CKMB.
(4) *per ax.* Est vero AG rectangulum sub AD & DB, DG enim
2. ipsi DB æqualis est (5), & FL quadratum est ex CD
(5) *per cor.* quoniam FG ipsi CD æqualis est (6), et CKMB qua-
prop. 43. dratum est ex CB.
lib. 1 & def.
31. l. 1.
(6) *per prop.*
34. l. 1.

Aliter.

Aliter.

Rectangulum sub AD & DB æquatur summæ rectangulorum sub AC & DB, & sub CD & DB (1), rectangulum vero sub AC & DB æquatur rectangulo sub CB & DB, (propter AC & CB æquales), seu rectangulo sub CD & DB cum quadrato ex DB (2), ergo rectangulum sub AD & DB æquatur duplo rectangulo sub CD & DB una cum quadrato ex DB, addatur utrinque quadratum ex CD et erit rectangulum sub AD & DB una cum quadrato ex CD æquale duplo rectangulo sub CD & DB una cum quadratis ex CD & DB, hoc est quadrato ex CB (3).

Cor. 1. Hinc patet quod si linea bifecetur, rectangulum sub partibus esset majus quam si secetur inæqualiter, et ergo summam quadratorum ex partibus esse minorem.

Cor. 2. Si duæ rectæ æquales ita dividantur ut rectangulum sub segmentis unius sit æquale rectangulo sub segmentis alterius, erunt ipsa segmenta æqualia.

Si rectæ bifecentur, res patet. Si vero non bifecentur, sint AB & CD & secentur in E & F.

Bifecentur in G & H, & quoniam ipsæ rectæ æquantur (1) erunt ipsarum semisses æquales, & ergo (2) semissium quadrata, sed æquantur quoque rectangula sub AE & EB, & sub CF & FD (3), desumptis igitur his ab æqualibus quadratis erunt residua, scilicet quadrata ex GE & ex HF (4) æqualia, & ergo ipsæ rectæ GE & HF æquantur (5), ergo summæ & differentiæ ipsarum & semissium, scilicet segmenta AE & CF, EB & FD, æquantur.

Cor. 3. Rectangulum sub summâ & differentiâ duarum rectarum æquatur differentiæ quadratorum.

Nam dictum rectangulum una cum quadrato minoris æquatur quadrato majoris, ut patet ex propositione præcedente, est enim AC major recta, CD minor, & DB differentia.

Cor. 4. Differentia quadratorum ex duobus lateribus BA & AC trianguli cujuscvis BAC, æquatur duplo rectangulo sub reliquo latere BC & distantia perpendiculari AF in ipsum ab angulo opposito, a medio ejus puncto.

Nam differentia quadratorum ex lateribus BA & AC æquatur differentiæ quadratorum ex segmentis BF & FC lateris in quod cadit perpendicularum (1), & ergo, cum perpendicularum cadit intra triangulum, rectangulo sub BC summâ horum segmentorum & differentia inter BF & FC (2), seu duplo rectangulo sub BC & dimidiâ differentiâ, distantia scilicet puncti F a medio puncto lateris BC.

Si vero perpendicularum cadit extra triangulum, erit differentia quadratorum ex segmentis BF & FC, æqualis rectangulo sub BC eorum differentiâ, & summâ eorum, BF & FC simul, seu duplo rectangulo sub BC & semisse ipsorum BF & FC, distantia scilicet puncti F a medio puncto lateris BC.

Fig. 12.

Cor. 5. Si a vertice trianguli isoscelis ABC ducatur recta BE ad basem, erit quadratum ejus cum rectangulo sub segmentis basis æquale quadrato lateris alterutrius AB vel BC.

Sit primo BE basi perpendicularis & ipsam bisecabit (1) *per cor.* (1), erit igitur rectangulum AEC æquale quadrato ex AE, est vero quadratum ex AE cum quadrato ex EB æquale quadrato ex AB (2), & ergo rectangulum AEC cum quadrato ex EB quadrato ex AB æquatur.

Sit jam BE non perpendicularis basi & ducatur perpendicularis BD, bisecatur igitur AC in D (3) & secatur in æqualiter in E, & est proinde rectangulum CEA cum quadrato ex DE æquale quadrato ex DA (4), addatur utrinque quadratum ex BD, & erit rectangulum CEA cum quadratis ex DE & BD, seu cum quadrato ex BE (5), æquale quadratis ex BD & DA seu quadrato ex BA (5).

PROP. VI. THEOR.

Fig. 13.
Vide N.

SI recta quævis (AB) bisecetur (in C) eique altera recta (BF) adjiciatur in directum, erit rectangulum sub totâ compositâ (AF) & adjunctâ (BF) una cum quadrato ex dimidia (CB) æquale quadrato ex (CF) compositâ ex dimidiâ & adjunctâ.

Describatur enim ex CF quadratum CEGF & ducatur EF, & per B ducatur BP parallela ad FG secans EF in K, & per K ducatur LO parallela ad CF occurrens AO ductæ per A parallelæ ad CD.

Quoniam AC & CB æquantur (1), erit AD æquale CK (2); sunt vero CK & KG æqualia (3), ergo AD ipsi KG æquale est, addatur utrinque CL, & erit AL Gnomoni CLP æquale, utrinque addatur DP & erunt AL & DP simul quadrato ex CF æqualia. (4) *per cor.* Est vero AL rectangulum sub totâ compositâ & adjunctâ, FL enim ipsi BF æqualis est (4), et DP quadratum

tum est dimidiæ CB, est enim quadratum ex DK (4), & (4) per cor.
DK ipsi CB æqualis est (5).

P. 43. l. 1.
(5) per prop.
34. l. 1.

Aliter.

Adjiciatur ad alterum terminum datæ recta LA ipsi Fig. 14.
BF æqualis, & erit LF bisecta in C & secta inæqualiter
in B, & ergo rectangulum LBF una cum quadrato ex
CB æquale erit quadrato ex CF (1), est vero rectangu- (1) per prop.
lum LBF æquale rectangulo AFB propter LA & BF 5. l. 2.
æquales.

PROP. VII. THEOR.

SI recta (AB) secetur utcunque, erunt quadrata Fig. 15.
totius (AB) & unius e segmentis (CB) simul
sumpta, æqualia duplo rectangulo sub totâ & dicto
segmento, una cum quadrato segmenti alterius.

Describatur quadratum ex AB, & ducta FB, ducatur
per C, CG parallela ad AF, & per P, intersectionem
ejus cum FB, ducatur DE parallela ad AB.

Quadratum AK æquatur rectangulis AE & PK una
cum quadrato DG, addatur utrinque quadratum CE, &
quadrata AK & CE simul æquantur rectangulis AE &
CK una cum quadrato DG.

Est vero AE æquale rectangulo sub AB & CB, quo-
niam CB & BE æquantur (1), & CK quoque æquale (1) per cor.
rectangulo sub AB & CB quoniam KB ipsi AB æquatur P. 43. l. 1.
(2), & DG quadratum est ex AC quoniam DP & (2) per def.
AC æquantur (3). 31. l. 1.
(3) per prop.
34. l. 1.

Aliter.

Quadratum ex AB æquatur duplo rectangulo ACB Fig. 16.
una cum quadratis ex AC & CB, addatur utrinque qua-
dratum ex CB, & quadratum ex AB una cum quadrato
ex CB æquatur duplo rectangulo ACB una cum qua-
drato ex AC & duplo quadrato ex CB. Sed duplum rec-
tangulum ACB una cum duplo quadrato ex CB æqua-
tur duplo rectangulo ABC. Ergo quadratum ex AB una
cum quadrato ex CB æquatur duplo rectangulo ABC
una cum quadrato ex AC.

Cor.

Cor. Hinc patet excessum summæ quadratorum ex rectis duabus AB & CB supra duplum rectangulum ABC sub ipsis, æqualem esse quadrato differentię inter ipsas AC.

PROP. VIII. THEOR.

Fig. 17. **S**I recta (AC) secetur utcunque (in B), erit rectangulum sub tota (AC) & parte alterutrâ (BC) quater sumptum, una cum quadrato ex (AB) parte reliqua, æquale quadrato quod ex totâ & dictâ parte, tanquam ex unâ rectâ describitur.

(1) per pos. Producat AC ut CD sit æqualis BC (1), & ex rec-
1. & p. 3. ta AD describatur quadratum ARZD (2), & per B &
l. 1. C ducantur BS & CV ipsi AR parallelę, & ducta RD,
(2) per prop. ducantur per G & K, EH & LP ipsi AD parallelę.
46. l. 1.
(3) per const. Quoniam BC & CD æquantur (3) & SV ipsi BC
(4) per prop. æqualis est (4) & VZ ipsi CD, æquantur quoque SV &
34. l. 1. VZ & proinde SG & VH æqualia sunt (5); æquantur
(5) per prop. vero VH & AG (6) ergo & SG ipsi AG æquale est;
36. l. 1.
(6) per prop. & quoniam FG ipsi BC æquatur (4) æquales sunt FG
43. l. 1. & CD & ergo quadratum FO quadrato CH æquatur.
(7) per prop. Sed & EK & KV æquantur (7), his æqualibus ergo ad-
43. l. 1. ditis æqualibus CH & FO, erunt EK & CH simul æqua-
lia SG & ergo ipsi AG; ergo AG, SG & VH una
cum EK & CH, ipsius AG quadrupla sunt. Sed AG,
SG & VH una cum EK & CH & quadrato LS æquan-
tur quadrato AZ, ergo AG quater sumptum una cum
LS æquatur ipsi AZ.

Sed AG rectangulum est sub AC & BC, quoniam
(8) per cor. CG ipsi CD (8) & ergo ipsi BC (9) æqualis est; & LS
P. 43. quadratum est ex AB quoniam AB & RS æquales sunt
(9) per const. (10).
(10) per

prop. 34.
l. 1.

Aliter.

Fig. 18. Producat AC ut CD sit æqualis BC; quadratum ex
AD æquatur quadratis ex AC & CD una cum duplo
rectangulo ACD, hoc est, quoniam BC & CD æquan-
(1) per const. tur (1), quadratis AC & BC una cum duplo rectangu-
lo ACB; quadrata vero ex AC & BC æquantur duplo
(2) per prop. rectangulo ACB una cum quadrato ex AB (2), ergo
7. l. 2. quadratum

quadratum ex AD æquatur rectangulo ACB quater sumpto una cum quadrato ex AB.

PROP. IX. THEOR.

SI recta (AB) secta sit in partes æquales (in C) Fig. 19. & in partes inæquales (in D), erunt quadrata ex partibus inæqualibus (AD & DB) dupla quadrati ex dimidiâ (AC) & quadrati ex parte intermediâ (CD) simul.

A puncto C ducatur CE ipsi AB perpendicularis & alterutri AC vel CB æqualis (1), & ductis AE & EB, (1) *per prop.* per D ducatur DF ipsi CE parallela & per F ducatur FG ipsi CD parallela, & ducatur FA. *11. & 3. l. 1.*

Quoniam angulus ACE rectus est & latera AC, CE æqualia (2), est CEA semirectus (3), similiter demonstratur CEB esse semirectum, est ergo AEB rectus; & cum propter parallelas GF & CD, EGF ipsi ECB æquatur (4), est EGF quoque rectus, GEF vero semirectus est, ergo GFE quoque est semirectus & GE, GF æquantur (5), similiter FDB rectus est, quoniam angulo ECB æquatur propter parallelas FD & CE, est vero DBF semirectus & ergo DFB semirectus & latera DF & DB æquantur (5), Quoniam ergo AC & CE æquales sunt, angulus vero ACE rectus, est quadratum ex AE duplum quadrati ex AC; & quoniam EG & GF æquales sunt & angulus EGF rectus, quadratum ex EF duplum est quadrati ex GF, sed æquantur GF & CD (6), ergo quadratum ex EF duplum est quadrati ex CD, ergo quadrata ex AE & EF sunt dupla quadratorum ex AC & CD; sed propter angulum AEF rectum, quadratum ex AF quadratis ex AE & EF æquatur (7), ergo quadratum ex AF duplum est quadratorum ex AC & CD, est vero quadratum ex AF quadratis ex AD & DF æquale propter angulum ADF rectum (7), ergo quadrata ex AD & DF dupla sunt quadratorum ex AC & CD, æquantur vero DF & DB & proinde quadrata ex AD & DB dupla sunt quadratorum ex AC & CD.

Aliter

Aliter.

Fig. 20. Quadratum ex AD æquale est quadratis ex AC & ex CD cum duplo rectangulo ACD (1), seu propter AC & CB æquales, duplo rectangulo BCD, addatur utrinque quadratum ex DB, & quadrata ex AD & DB æquantur quadratis ex AC, CD, DB cum duplo rectangulo BCD, sed duplum rectangulum BCD cum quadrato ex DB æquatur quadratis ex CB & CD (2), seu propter AC & CB æquales, ex AC & CD, & ergo sunt quadrata ex AD & DB æqualia duplo quadrato ex AC cum duplo quadrato ex CD.

PROP. X. THEOR.

Fig. 21. SI recta quædam (AB) bifecetur (in C) eique in directum adjiciatur recta quævis (BD), erit quadratum ex totâ compositâ (AD) cum quadrato adjectæ (BD) æquale duplo quadrato ex eâ (CD) quæ composita est ex dimidiâ & adjectâ, cum duplo quadrato ex dimidiâ (AC).

A puncto C ducatur CE ipsi AB perpendicularis atque alterutri CA vel CB æqualis (1), & ducta AE, per E ducatur EF ipsi AB parallela (2) & per D ducatur DF ipsi CE parallela, & quoniam propter parallelas CE & DF anguli CEF & DFE duobus rectis æquales sunt (3) erunt anguli BEF & DFE duobus rectis minores, ergo concurrunt rectæ EB & FD (4), fit concursus earum G & ducatur GA.

Quoniam CA & CE æquales sunt (5), est vero angulus ad C rectus (5), est angulus CEA semirectus (6), similiter est CEB semirectus, ergo angulus AEB rectus est; & quoniam DG & EC parallelæ sunt (7) æquantur anguli alterni GDB, ECB, est ergo GDB rectus; sed æquantur anguli DBG, EBC (8), est vero EBC semirectus ergo DBG semirectus est, & proinde DGB semirectus, æquantur ergo latera DB, DG (9); & quoniam EGF semirectus est, angulus vero F rectus, est enim opposito C æqualis (10), erit FEG semirectus, et ergo latera EF & FG æquantur.

Quoniam

Quoniam ergo AC & CE æquales sunt, angulus vero ACE rectus, est quadratum ex AE quadrati ex AC duplum, & quoniam GF & FE æquales sunt, angulus vero ad F rectus, erit quadratum ex GE quadrati ex EF duplum, æquantur vero EF & CD (11), ergo quadratum ex GE quadrati ex CD duplum est, sed & quadratum ex AE quadrati ex AC duplum est, ergo quadrata ex AE & EG dupla sunt quadratorum ex AC & CD, sed quadratum ex AG quadratis ex AE & EG æquatur, & ergo duplum est quadratorum ex AC & CD; & quadrata ex AD & DG quadrato ex AG æquantur & ergo dupla sunt quadratorum ex AC & CD, sunt vero BD & DG æquales & ergo quadrata ex AD & DB dupla sunt quadratorum ex AC & CD.

Aliter.

Data AB adjiciatur FA ipsi BD æqualis; bisecta est ergo recta FD in C & secta inæqualiter in B, & ergo quadrata ex FB & BD dupla sunt quadratorum ex FC & CB (1), sed æquantur FB & AD, & quoque FC & CD (1) quoniam FA ipsi BD æqualis est, quadrata ergo ex AD & DB dupla sunt quadratorum ex CD & CB seu AC.

PROP. XI. PROB.

Datam rectam finitam (AB) ita secare ut rectangulum sub totâ & unâ parte contentum, æquale sit quadrato ex altera parte.

Ex A ducatur AC datæ AB perpendicularis, & sit AC ipsi AB æqualis, & bisecetur in E, & ducta EB producat CA donec EF ipsi EB æqualis sit, & in data AB sumatur AH ipsi AF æqualis, erit quadratum ejus æquale rectangulo sub reliquo segmento HB & tota AB.

Perficiatur enim quadratum ex AB, ducaturque per H recta GK ipsi AC parallela, & per F recta FG ipsi AB parallela.

Quoniam CA bisecatur in E eique adjicitur AF, erit rectangulum sub CF & FA cum quadrato ex EA, æquale quadrato ex EF (1), seu quadrato ex EB ipsi EF æquali (2), & proinde quadratis ex EA & AB (3), commune auferatur quadratum ex EA & erit rectangulum sub G

Fig. 23.

(1) per prop.

6. l. 2.

(2) per const.

(3) per prop. 47. l. 1.

sub CF & FA æquale quadrato ex AB, sed quoniam AF & FG æquales sunt, CG est rectangulum sub CF & FA, æquantur ergo CG & AD, & si commune CH auferatur erunt AG & HD æqualia, est vero AG quadratum ex AH, AF enim & AH æquantur (4) & angulus A rectus est, & HD rectangulum est sub AB & HB, BD enim ipsi AB æqualis est.

PROP. XII. THEOR.

Fig. 24.

IN triangulis obtusangulis (ut BAC), quadratum ex latere (AB) obtusum angulum subtendente, majus est quam quadrata ex lateribus (BC & CA) obtusum angulum continentibus, duplo rectangulo quod continetur sub alterutro ex his lateribus (BC) & parte ejus externâ (CD) inter perpendicularum demissum ab angulo opposito, & angulum obtusum.

Quadratum ex BA æquale est quadratis ex AD & DB (1), sed quadratum ex DB æquatur quadratis ex DC & CB cum duplo rectangulo sub DC & CB (2), & ergo quadratum ex AB æquale est quadratis ex AD, DC, & CB cum duplo rectangulo sub DC & CB, quadratum vero ex AC æquatur quadratis ex AD & DC (3), & proinde quadratum ex AB æquale est quadratis ex AC & CB cum duplo rectangulo sub DC & CB; quadratum ergo ex AB majus est quam quadrata ex AC & CB, duplo rectangulo sub DC & CB.

PROP. XIII. THEOR.

Fig. 25.

IN omni triangulo (ABC) quadratum ex latere (AB) acutum angulum subtendente minus est quam quadrata ex lateribus (AC & CB) circa illum angulum, duplo rectangulo sub alterutro ex iis (AC) & intercepto ejus inter perpendicularum (BF) demissum ab angulo opposito, & angulum acutum.

Quadrata ex AC & CF æquantur duplo rectangulo sub AC & CF cum quadrato ex AF (1), addatur utrinque quadratum ex perpendicularo BF, & erunt quadrata ex AC, CF & BF æqualia duplo rectangulo

rectangulo sub AC & CF cum quadratis ex BF & AF seu cum quadrato ex AB ipsis æquali (2), sed quadrata (2) *per prop.* ex BF & CF æqualia sunt quadrato ex BC (2), & ergo 47. l. 1. quadrata ex BC & AC æquantur duplo rectangulo sub AC & CF cum quadrato ex AB. Minus est ergo quadratum ex AB quadratis ex AC & CB, duplo rectangulo sub AC & CF.

Schol. 1. Si angulus CAB sit rectus, coincidunt puncta F & A, & rectangulum sub AC & CF erit quadratum ex AC, patet vero quadratum ex AB in tali casu quadratis ex AC & CB simul minus esse duplo quadrato ex AC (1).

Schol. 2. Hinc datis cujuscvis trianguli lateribus (in 47. l. 1. *(1) per prop.*) numeris scilicet) inveniri potest area ejus; subtrahatur enim quadratum alterutrius ex lateribus quod non maximum sit AB, a summa quadratorum ex reliquis lateribus AC & CB, & per alterutrum ex iis AC dividatur semissis residui, rectangulum scilicet sub AC & CF, subducatur quoti CF quadratum ex quadrato lateris reliqui CB & multiplicatâ radice quadraticâ BF residui in semissem divisoris prædicti AC proveniet area trianguli.

Cor. Si ab angulo quovis (A) trianguli (BAP) ducatur *Fig. 26.* recta (AC) bisecans latus oppositum, erunt quadrata ex cruribus istius anguli (AB & AP) dupla quadratorum ex semisse lateris oppositi & ex recta (AC) latus istud bisecante.

Si recta bisecans latus sit ipsi perpendicularis patet propositio ex P. 47. l. 1.

Si vero non, ab angulo A ducatur ad latus oppositum perpendicularis AF, & cum ex angulis ACB & ACP alter obtusus est, sit obtusus ACB, & proinde quadratum ex AB æquale erit quadratis ex AC & ex CB cum duplo rectangulo sub BC & CF (1), angulus vero ACP acutus est et ergo quadratum ex AP cum duplo rectangulo sub PC & CF, seu propter æquales PC & BC (2) cum duplo rectangulo sub BC & CF (3), æquale est quadratis ex AC & ex CP, ergo quadrata ex AB & AP cum duplo rectangulo sub BC & CF æquantur duplo quadrato ex AC cum quadratis ex BC & CP & cum duplo rectangulo sub BC & CF, auferatur utrinque duplum rectangulum sub BC & CF, & erunt quadrata ex AB & AP æqualia duplo quadrato ex AC cum quadratis ex BC & CP seu cum duplo quadrato ex BC, quoniam BC & CP æquantur. *(1) per prop. 12. l. 2. (2) per by-poth. (3) per P. 13. l. 2.*

PROP. XIV. PROB.

Fig. 27.

Dato rectilineo (Z) æquale quadratum constituere.

Dato rectilineo constituatur æquale parallelogrammum
 (1) *per prop.* rectangulum CI (1), & si hujus latera adjacentia æqualia
 45. l. I. sint factum erit quod proponebatur.

Si non, producaturs latus alterutrum IA, & fit pars
 (2) *per prop.* producta AL lateri adjacenti AC æqualis (2), bisecetur
 3. l. I. IL in O & centro O intervallo vero OL describatur semicirculus LBI, & producaturs CA ut peripheriæ occurrat in B. Quadratum ex AB descriptum æquale erit dato rectilineo.

Ducatur enim OB, & quoniam IL bisecta est in O & secta inæqualiter in A, erit rectangulum sub IA & AL
 (3) *per prop.* cum quadrato ex OA æquale quadrato ex OL (3), seu
 5. l. 2. ex OB ipsi OL æquali, & proinde quadratis ex OA &
 (4) *per prop.* AB (4), auferatur utrinque quadratum ex OA, & erit rectangulum sub IA & AL æquale quadrato ex AB, est
 47. l. I. vero rectangulum sub IA & AL ipsi IC æquale, æquantur enim AL & AC (5), quadratum ergo ex AB rectangulo IC & ergo rectilineo Z æquale est.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M .

L I B E R T E R T I U S .

D E F I N I T I O N E S .

1. **Æ**Quales circuli sunt, quorum diametri sunt *Vide N.*
æquales.
2. Recta linea circulum contingere dicitur, quæ tangens *Fig. prima.*
circulum & producta, ipsum non secat. *Tab. tertia.*
3. Circuli sese contingere dicuntur, qui tangentes se
mutuo, seipsos non secant.
4. In circulo æqualiter distare a centro rectæ lineæ di-
cuntur, quando a centro ad ipsas ductæ perpendiculares
æquales sunt.
5. Magis autem distare a centro dicitur ea in quam ma-
ior perpendicularis cadit.
6. Segmentum circuli est figura quæ rectâ lineâ & parte *Fig. 2.*
circumferentiæ continetur.
7. Angulus in segmento, est angulus sub rectis a quovis *Fig. 3.*
puncto in parte circumferentiæ quâ continetur segmen-
tum ductis ad ipsius extrema.
8. Angulus insistere dicitur parti circumferentiæ (seu
arui) quam crura ejus includunt.
9. Sector circuli est figura quæ a duobus radiis & parte *Fig. 4.*
circumferentiæ inter ipsos continetur.
10. Similia segmenta circulorum sunt quæ angulos ca- *Vide N.*
piunt æquales.

P R O P .

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Fig. 5.
Vide N.

Dati circuli (ACB) centrum invenire.

Ducatur utcunque recta AB , bisecetur in D (1),
(1) per prop. 10. l. 1. per D ducatur DC ipsi AB perpendicularis (2), quæ
(2) per prop. 11. l. 1. producat ad E , bisecetur CE in F (1), & erit F
centrum.

Non enim, sed, si fieri potest, sit G centrum, & ducantur GA , GD & GB .

Quoniam igitur in triangulis GDA , GDB , latus GA
(3) per by-poth. & def. lateri GB æquale est (3), & DA ipsi DB (4), GD
vero commune est, anguli GDA & GDB æquantur (5),
(4) per const. 15. l. 1. & ergo sunt recti (6). Angulus vero CDB rectus est
(5) per prop. (7), GDB igitur ipsi CDB æqualis est (8), pars totius,
8. l. 1. quod absurdum. Non est igitur G centrum circuli ACB ,
(6) per def. & similiter ostendi potest nullum aliud punctum præter
11. l. 1. ipsum F esse centrum. Ergo F centrum est circuli
(7) per const. ACB .
(8) per ax.
11.

PROP. II. THEOR.

Fig. 6.
Vide N.

Si in circuli circumferentiâ duo quævis puncta
(A & B) sumantur, recta linea quæ ipsa con-
jungit cadet intra circulum.

Non enim, sed, si fieri potest, sit AEB recta, cujus punctum E cadit extra circulum, & sit D centrum circuli, & ducantur DA , DE & DB .

Quoniam igitur in triangulo ADB , latera DA & DB
(1) per def. æquantur (1), angulus DBA angulo DAB æqualis est
15. l. 1. (2); angulus vero externus DEA , angulo interno DBA
(2) per prop. major est (3), & ergo angulo DAB major est, & proinde
5. l. 1. latus DA latere DE majus est (4), recta DF vero ipsi
(3) per prop. DA æquatur (5), & proinde latere DE major est, pars
16. l. 1. toto, quod absurdum. Linea igitur AEB non recta est,
(4) per prop. & similiter demonstrari potest lineam cujus punctum
19. l. 1. quodvis in circumferentiâ ipsâ est, non esse rectam.
(5) per def. 15. l. 1. Rectæ igitur lineæ omne punctum intra circulum
cadit.

PROP.

PROP. III. THEOR.

SI in circulo recta (BL) per centrum ducta, aliam Fig. 7.
(CF) non per centrum ductam secet bifariam,
secabit quoque perpendiculariter.

Et si secet perpendiculariter, secabit bifariam.

Pars. I. Ductis enim AC & AF, erit in triangulis (1) per def.
AOC, AOF latus AC ipsi AF (1) & quoque OC ipsi OF 15. l. 1.
(2) æquale, AO vero commune, angulus igitur AOC (2) per by-
angulo AOF æqualis est (3), & ergo uterque est rec-^{poth.}
tus (4), BO igitur ipsi CF perpendicularis est (4). 8. l. 1. (3) per prop.

Pars. II. Quoniam in triangulo CAF latus AC 11. l. 1. (4) per def.
lateri AF æquale est (5), erit angulus AFC angulo ACF
quoque æqualis (6), & ergo in triangulis CAO, FAO, (5) per def.
anguli ACO, AFO æquantur, & sunt quoque AOC & 15. l. 1.
AOF æquales (7), latus vero AO, angulis æqualibus (6) per prop.
ACO, AFO, oppositum, commune est, & proinde latus (7) per
OC lateri OF æquatur (8), & igitur recta CF biseca-^{hypoth.}
tur. (8) per prop. 26. l. 1.

PROP. IV. THEOR.

SI in circulo duæ rectæ, non ambæ per centrum Fig. 7. & 8.
ductæ, se invicem secant, sese bifariam non se-
cabunt.

Si una ipsarum BL transeat per centrum, altera vero Fig. 7.
CF non, patet priorem non bisecari.

Si vero neutra ipsarum BC & FL transeat per cen- Fig. 8.
trum, ducatur OA a centro ad intersectionem, & si
BC bisecetur in A, erit OA ipsi perpendicularis (1), (1) per prop.
& igitur angulus OAC rectus; & si FL in ipso A bise- 3. l. 3.
cetur erit OA ipsi FL perpendicularis (1), & igitur an-
gulus OAL rectus, & proinde angulo OAC æqualis (2), (2) per ax.
pars toti, quod absurdum. Rectæ igitur BC & FL non 11.
sese secant bifariam.

PROP. V. THEOR.

Fig. 9.

SI duo circuli (ABC , ABF) sese invicem secant,
centrum ipsorum non erit idem.

Sit enim A , si fieri potest, centrum circuli utriusque,
& ducatur AB ad intersectionem, & ACF utcumque.

Quoniam igitur A circuli ABC centrum est, erit AB
 ipsi AC æqualis (1), & quoniam A circuli ABF cen-
 trum est, erit AB ipsi AF æqualis (1), est igitur AC
 ipsi AF æqualis (2), pars toti, quod absurdum. Non
 est igitur A centrum circuli utriusque, & similiter nec
 punctum quodvis aliud.

(1) per def.
15. l. 1.

(2) per ax.
1.

PROP. VI. THEOR.

Fig. 10.

SI duo circuli (ABC , ABF) sese intra contingant,
centrum ipsorum non erit idem.

Sit enim A , si fieri potest, centrum circuli utriusque,
& ducatur AB ad contactum, & ACF utcumque.

Quoniam igitur A circuli ABC centrum est, erit AB
 ipsi AC æqualis (1), & quoniam A circuli ABF centrum
 est, erit AB ipsi AF æqualis (1), est igitur AC ipsi
 AF æqualis (2), pars toti, quod absurdum. Non est
 igitur A centrum circuli utriusque, & similiter nec
 punctum quodvis aliud.

(1) per def.
15. l. 1.

(2) per ax.
1.

PROP. VII. THEOR.

Fig. 11.
Vide N.

SI sumatur punctum intra circulum a centro diver-
sum, & ab ipso ad circumferentiam plures rectæ
ducantur, maxima erit ea quæ per centrum transit.

Reliqua pars diametri erit minima.

Quæ æquales angulos cum diametro faciunt,
æquantur.

Quæ sit propior diametro, major est remotiore.

Plures quam duæ duci non possunt æquales.

Pars. I.

Pars. I. CB transiens per centrum, major est quâvis aliâ CD.

Ducatur enim AD, & est AB ipsi AD æqualis (1), (3) *per def.* & ergo si communis addatur CA, erit CB ipsis CA & AD simul æqualis; sunt vero CA & AD simul ipsâ CD majores (2), & igitur CB ipsâ CD major est. (2) *per prop.*

Pars. II. Reliqua pars diametri CF, quâvis aliâ CE minor est. 20. l. 1.

Ducatur enim AE, & sunt AC & CE simul ipsâ AE majores (3), & ergo ipsâ AF majores, auferatur igitur communis AC & erit CE ipsâ CF major. (3) *per prop.*

Pars. III. Rectæ CL & CD, quæ æquales cum diametro CB faciunt angulos, æquantur.

Non enim, sed, si fieri potest, sit alterutra ex ipsis CL major, & abscindatur CG ipsi CD æqualis, & ducantur AD & AG.

In triangulis igitur ACG & ACD, latus AC commune est, & CG ipsi CD æquale (4), angulus quoque ACG angulo ACD æqualis est (5), & proinde latera AG & AD æquantur (6), est vero recta AD ipsi AO æqualis, & ergo AG ipsi AO æquatur, pars tota, quod absurdum. Neutra igitur CL vel CD alterâ major est & ergo sunt æquales. (4) *per const.* (5) *per sym. poss.* (6) *per prop.*

Pars. IV. CD vel CL quæ propior est diametro major est remotiore CE.

Si datæ sint CD & CE ad easdem partes ipsius CB, ducantur AD & AE, & in triangulis CAD, CAE, latera CA & AD lateribus CA & AE æquantur, angulus vero CAD angulo CAE major est, & ergo latus reliquum CD reliquo CE majus est (7). (7) *per prop.*

Si vero datæ sint CL & CE ad partes diversas ipsius CB, constituatur angulus ACD angulo ACL æqualis, & erit CD ipsi CL æqualis (8), est vero CD ipsâ CE major, & igitur CL ipsâ CE major est. (8) *per partem tertiam.*

Pars. V. Plures quam duæ duci non possunt æquales.

Nam ducantur utcunque tres rectæ a puncto C ad circumferentiam, & erit aut una ipsarum pars diametri, & ergo major vel minor alterutrâ reliquarum, (per part. prim. & secun.) aut duæ ipsarum ad easdem partes diametri, & ergo inæquales, (per part. quart.)

PROP. VIII. THEOR.

Fig. 12
13.

SI extra circulum aliquod punctum sumatur, & ab ipso ad circumferentiam plures rectæ ducantur, quæ æquales faciunt angulos cum transeunte per centrum, erunt æquales.

Incidentium vero in circumferentiam concavam maxima est ea quæ transit per centrum.

Reliquarum, quæ maximæ propior major est remotiore.

Incidentium vero in convexam circumferentiam minima est ea quæ producta transiret per centrum.

Reliquarum, quæ minimæ propior minor est remotiore.

Duæ tantum duci possunt æquales vel ad concavam vel convexam circumferentiam.

Pars. I. AB & AX, quæ æquales faciunt angulos cum AZ, sunt æquales.

Non enim, sed, si fieri potest, sit alterutra ex ipsis AB major, & abscindatur AE ipsi AX æqualis, & ducantur ZE & ZX.

In triangulis igitur ZAE, ZAX, latus ZA commune est, & AE ipsi AX æquale (1), angulus quoque ZAE angulo ZAX æqualis est (2), & proinde latera ZE & ZX æquantur (3), est vero recta ZO ipsi ZX æqualis (4), & ergo ZE ipsi ZO æquatur, pars toti, quod absurdum, Neutra igitur AB vel AX alterâ major est & ergo sunt æquales.

Fig. 12.

Pars. II. Incidentium in concavam circumferentiam, est AY quæ transit per centrum, aliâ quâvis AX major.

Ducatur enim ZX, & erit ZY ipsi ZX æqualis (5), & ergo si communis addatur AZ, erit AY ipsis AZ & ZX simul æqualis; sunt vero AZ & ZX simul ipsâ AX majores (6), & igitur AY ipsâ AX est major.

20. l. I.

Pars. III. AB vel AX quæ maximæ propior, major est remotiore AD.

Si datæ sint AX & AD ad easdem partes ipsius AY, ducantur ZX & ZD, & in triangulis AZX, AZD, latera AZ,

AZ, ZX, lateribus AZ, ZD æquantur, angulus vero AZX angulo AZD major est, & ergo latus reliquum AX reliquo AD majus est (7).

(7) *per prop.*
24. l. 1.

Si vero datæ sint AB & AD ad partes diversas ipsius AY, constituatur angulus ZAX angulo ZAB æqualis, & erit AX ipsi AB æqualis (8), est vero AX ipsa AD major, & igitur AB ipsa AD major est.

(8) *per partem primam.*

Pars. IV. Incidentium in convexam circumferentiam est AF quæ producta transiret per centrum, quâvis aliâ AX minor.

Fig. 13.

Ducantur enim ZF & ZX, & sunt ZX & XA ipsa ZA majores (9), & igitur, ablatis æqualibus ZX & ZF, erit AX ipsa AF major.

(9) *per prop.*
20. l. 1.

Pars. V. AB vel AX quæ minimæ propior, minor est remotiore AC.

Si datæ sint AX & AC ad easdem partes ipsius AZ, ducantur ZX & ZC, & erunt ZC & CA simul, ipsis ZX & XA simul majores (10), ablatis igitur æqualibus ZC & ZX, erit AC ipsa AX major.

(10) *per prop.* 21.
l. 1.

Si vero datæ sint AB & AC ad partes diversas ipsius AZ, constituatur angulus ZAX angulo ZAB æqualis, & erit AX ipsi AB æqualis (11), est vero AC ipsa AX major, & ergo ipsa AB major.

(11) *per partem primam.*

Pars. VI. Dux tantum duci possunt æquales vel ad concavam vel convexam circumferentiam.

Si tres enim utcumque ducantur, erit vel una ipsarum transiens per centrum, & igitur aut major aut minor alterutra reliquarum, (per part. 2 & 4.) vel duæ ad easdem partes transeuntis per centrum, & igitur inæquales (per part. 3 & 5.)

Schol. Cum facile patet quamvis ductam ad concavam circumferentiam ductâ ad convexam esse majorem, sequitur si tres rectæ utcumque ducantur a puncto extra circumlum ad ejus circumferentiam, duas tantum ex iis esse æquales.

Cor. Hinc & ex parte 5. prop. 7. patet nullum esse punctum a quo duci possunt ad circuli circumferentiam tres rectæ æquales, præter ipsum centrum.

PROP. IX. THEOR.

SI sumatur intra circulum punctum quodvis, & ab ipso ad circumferentiam duci possunt plures quam duæ rectæ æquales, erit istud punctum circuli centrum.

Non est enim a centro diversum, nam si fuerit tantum
(1) per prop. 7. l. 3. duæ duci poterint æquales ab ipso ad circumferentiam (1).

PROP. X. THEOR.

Fig. 14 &
15.
Vide N.

Circulus (BDF) circulum (BLF) in pluribus quam duobus punctis non secat.

Secet enim, si fieri potest, in tribus punctis B, F & C, & sit A centrum circuli BLF, & ducantur ab ipso ad intersectiones rectæ AB, AF & AC, & hæ erunt æquales (1); sed quoniam circuli sese interfecant centrum non habent (2) per prop. 5. l. 3. idem (2), A igitur non est circuli BDF centrum, & ergo quoniam ad circumferentiam circuli BDF ducuntur tres rectæ AB, AC & AF, a puncto diverso a centro ejus, hæ rectæ non erunt æquales (3), ostensum vero fuit ipsas esse æquales, quod absurdum. Circuli igitur in tribus punctis sese non interfecant.

(3) per cor.
prop. 8. l. 3.

Schol. Hinc patet circulum circulo in pluribus quam duobus punctis non omnino occurrere.

PROP. XI. THEOR.

Fig. 16.

SI duo circuli (ECF & DCL) sese intus contingant, recta ipsorum centra conjungens transibit per contactum.

Non enim, sed, si fieri potest, sit A centrum circuli ECF, & B centrum circuli DCL, & sit DL recta centra conjungens, & ducantur BC & AC.

Quoniam igitur in triangulo BAC latera BA & AC latere BC majora sunt (1), BC vero ipsi BD æquatur quoniam

(1) per prop.
20. l. 1.

quoniam radii sunt circuli DCL, erunt rectæ BA & AC ipsâ BD majores, & igitur, ablatâ communi BA, erit AC ipsâ AD major, est vero AC ipsi AE æqualis quoniam circuli ECF sunt radii, & igitur AE ipsâ AD est major, pars toto, quod absurdum. Non igitur ita posita sunt centra ut recta ipsa conjungens non transeat per contactum.

PROP. XII. THEOR.

SI duo circuli (AOC & BFC) sese extra contin-
gant, recta ipsorum centra conjungens transibit
per contactum. Fig. 17.

Non enim, sed, si fieri potest, sint A & B centra, & recta AB ipsa conjungens non transeat per contactum, & ducantur AC & BC.

Quoniam igitur in triangulo ACB latera AC & CB latere AB majora sunt (1), recta vero AO ipsi AC æqua-
lis est quoniam circuli AOC sunt radii, & recta BF ipsi BC æqualis quoniam radii sunt circuli BFC, erunt AO & BF simul ipsâ BA majores, pars toto, quod absurdum. Non igitur ita posita sunt centra ut recta ipsa conjungens non transeat per contactum. (1) per prop. 20. l. 1.

PROP. XIII. THEOR.

Circulus circulum sive intus sive extra in uno tantum
puncto contingit. Fig. 18, 19
& 20.
Vide N.

Contingant enim intus, si fieri potest, circuli ADE & BDF in duobus punctis D & C, & ducantur AD, AC & BC.

Quoniam igitur BD & BC circuli BDF sunt radii, est BD ipsi BC æqualis, & ergo si utrinque addatur AB, erit AD ipsis AB & BC æqualis; sunt vero AD & AC circuli ADE radii, & ergo AD ipsi AC æquatur, & proinde AB & BC ipsi AC æquales sunt, sed & ipsâ majores (1), quod absurdum. (1) per prop. 20. l. 1.

Si vero puncta contactûs sint ad terminos jungentis centra, CD bisecta foret in A & quoque in B, quoniam circuli utriusque est diameter, quod absurdum. Fig. 19.

Contingant

Fig. 20.

Contingant jam extra, si fieri potest, duo circuli ADE & BDF in duobus punctis D & C, & ducantur AB, AD & BD.

Quoniam igitur AD & AC circuli ADE sunt radii, æquales sunt, & quoniam BC & BD circuli BDF sunt radii, sunt quoque æquales, ergo AD & BD simul ipsi AB æquantur, sed & ipsæ sunt majores (2), quod absurdum.

(2) per prop.
20. l. 1.

In nullo igitur casu circuli sese in duobus punctis contingunt.

Schol. Hinc patet circumulum circulo contingentem non iterum ipsi occurrere.

PROP. XIV. THEOR.

Fig. 21.

IN circulo æquales rectæ (BC & FL) æqualiter a centro distant.

Et rectæ (BC & FL) quæ æqualiter a centro distant, sunt æquales.

Pars. I. Sit A centrum circuli, & ducantur AC & AL, & quoque AO & AI ipsas BC & FL perpendiculares.

(1) per by-
posb.

(2) per prop.
3. l. 3.

(3) per ax.
7.

(4) per cor. 1.
P. 46. l. 1.

(5) per prop.
47. l. 1.

(6) per ax.
3.

(7) per cor. 2.
P. 46. l. 1.

(7) per by-
posb.

(8) per cor. 1.
P. 46. l. 1.

(9) per prop.
47. l. 2.

Quoniam igitur BC & FL æquales sunt (1), perpendiculares vero a centro AO & AI ipsas bisecant (2), erunt quoque OC & IL æquales (3), & ergo ipsorum quadrata æquantur (4); sed sunt AC & AL æquales, & ergo æquantur quoque ipsorum quadrata (4); est vero quadratum ex AC quadratis ex AO & OC æquale (5), & quadratum ex AL quadratis ex AI & IL æquale (5), & igitur quadrata ex AO & OC, quadratis ex AI & IL æquantur, & proinde, ablati æqualibus quadratis ex OC & IL, erunt quadrata ex AO & AI æqualia (6), & ergo ipsæ rectæ æquantur (7).

Pars. II. Quoniam enim AO & AI æquales sunt (7), æquantur ipsorum quadrata (8); sed sunt AC & AL æquales, & ergo æquantur quoque ipsorum quadrata (8); est vero quadratum ex AC quadratis ex AO & OC æquale (9), & quadratum ex AL quadratis ex AI & IL æquale (9), & igitur quadrata ex AO & OC quadratis ex AI & IL æquantur, & proinde, ablati æqualibus quadratis ex AO & AI, erunt quadrata

drata ex OC & IL æqualia (10), & ergo ipsæ rectæ (10) *per an.*
æquantur (11), quoniam vero AO & AI ipsas BC & FL ^{(11) per cor.}
bisecant (12,) sunt OC & IL ipsarum BC & FL ^{2. P. 46.}
semisses, & quoniam æquales sunt, ipsæ BC & FL ^{1. 1.}
quoque æquantur (13). ^{(12) per prop. 3. 1. 3.}
^{(13) per an. 6.}

PROP. XV. THEOR.

Rectarum circulo inscriptarum, maxima est diame- *Fig. 22.*
ter. Aliarum vero, quæ propior centro, major *Vide N.*
est remotiore.

Pars. I. Diameter AB aliâ quâvis ED major est.

Ducantur enim CD & CE, & est CD ipsi CB æqualis,
& CE ipsi CA (1), est igitur AB ipsis CD & CE simul ^{(1) per def.}
æqualis; sed CD & CE simul ipsâ ED majores sunt (2), ^{15. 1. 1.}
& ergo AB ipsâ ED est major. ^{(2) per prop. 20. 1. 1.}

Pars. II. Quæ propior diametro, major est re-
motiore.

Primò datæ sint ED & IK quæ sunt ad easdem
partes & non interfecant, & ducantur CD, CE, CI &
CK.

Quoniam igitur in triangulis ECD, ICK, latera EC,
CD, lateribus IC, CK æquales sunt, angulus vero ECD
angulo ICK major, erit latus ED latere IK majus (1). ^{(1) per prop. 24. 1. 1.}

Jam datæ sint ZX & IK, quæ vel sunt ad partes diver-
sas, vel sese interfecant, & ductis CO & CF ipsis ZX &
IK perpendicularibus, a majore CF abscindatur CV
minori CO æqualis (2), & per V ducatur ED ipsi CF ^{(2) per prop. 3. 1. 1.}
perpendicularis.

Quoniam igitur ZX & ED æqualiter a centro distant
(3), est ED ipsi ZX æqualis (4), ED vero ipsâ IK est ^{(3) per const. (4) per prop. 14. 1. 3.}
major (5), & ergo ZX ipsâ IK est major. ^{(5) per part. prac.}

PROP. XVI. THEOR.

Fig. 23.
Vide N.

Recta quæ per terminum diametri circuli ducta est ipsi perpendicularis, tota extra circulum cadit. Et si recta quævis inter ipsam & circulum ad contactum ducatur, circulum secat.

Pars. I. Sit enim, si fieri potest, BG, circulo iterum occurrens in G, ipsi AB perpendicularis, & ducatur CG.

Quoniam igitur in triangulo GCB, latus GC lateri CB æquatur, angulus CBG angulo CGB æqualis est (1), & ergo uterque est acutus (2), est vero CBG rectus (3), quod absurdum. Recta igitur ducta per B ipsi AB perpendicularis circulo non iterum occurrit.

Pars. II. Sit BF ipsi AB perpendicularis, & inter ipsam & circulum ducatur EB quæ, si fieri potest, circulum non secat.

Quoniam igitur angulus CBF rectus est, erit CBE acutus, ducatur ergo CI ipsi BE perpendicularis, & cadet ad partes anguli CBE (4).

Proinde in triangulo BCI, erit angulus CIB angulo CBI major, & ergo latus CB latere CI majus (5); est vero CO ipsi CB æqualis, & ergo CO ipsa CI erit major, pars toto, quod absurdum. Non igitur cadit punctum I extra circulum, & ergo recta BE circulum secat.

Schol. 1. Hinc patet rectam BF circulum contingere in B; contingentemque in uno tantum puncto circulo occurrere, & ad singulum punctum circumferentiæ unicam esse contingentem.

Schol. 2 Patet quoque rectam quæ ad B facit cum AB angulum acutum utèunque magnum, iterum circumferentiæ occurrere.

Cor. Ex hac propositione patet methodus ducendi contingentem per datum quodvis punctum B in circuli circumferentiâ; ducere scilicet ad istud punctum diametrum AB, ipsique, per terminum ejus, perpendicularem BF.

PROP. XVII. PROB.

A dato puncto (*A*), extra circulum datum Fig. 24.
(*CBF*), rectam ducere quæ circulum contin-
gat.

Sit *C* centrum circuli dati, & centro *C*, intervallo
CA, describatur circulus *CAE*; ducatur *CA*, & ipsi
per *F* ducatur perpendicularis recta *FE* circulo *CAE*
occurrentes in *E*, ducatur *CE* & recta a dato puncto *A*
ducta ad *B* circulum in *B* continget.

Nam in triangulis *ACB*, *ECF*, latera *AC*, *CB* (1) per def.
lateribus *EC*, *CF* æqualia sunt (1), angulus vero ad *C* ^{15. l. 1.}
communis, angulus igitur *ABC* angulo *EFC* æqualis est (2) per prop.
(2), sed est *EFC* rectus (3), & ergo *ABC* rectus est, & (3) per const.
proinde recta *AB* circulum *CBF* contingit (4). ^{(4) per prop.}

Schol. Patet duas duci posse contingentes a puncto ^{16. l. 3.}
A, utrinque scilicet rectæ *AC* una.

PROP. XVIII. THEOR.

SI recta (*DB*) circulum contingat, ducta a centro Fig. 25.
ad contactum (*CD*) erit ipsi perpendicularis.

Non enim, sed, si fieri potest, sit *CF* ipsi *BD* perpen-
dicularis, & in triangulo *CFD* quoniam angulus *CFD*
rectus est, erit *CDF* acutus (1), est igitur latus *CD* latere (1) per cor.
CF majus (2), sed *CE* ipsi *CD* æqualis est, & ergo *CE* ^{P. 17. l. 1.}
ipsa *CF* major, pars toto, quod absurdum. Non est (2) per prop.
igitur *CF* ipsi *BD* perpendicularis, & similiter nec alia ^{19. l. 1.}
quævis præter ipsam *CD*.

PROP. XIX. THEOR.

SI recta (*BC*) circulum contingat, recta (*BA*) Fig. 26.
ducta per contactum contingenti perpendicularis,
transit per centrum.

Non enim, sed, si fieri potest, sit centrum *Z* extra
rectam *BA*, & ducatur *ZB*.

I

Quoniam

Quoniam igitur a centro ad contactum ducitur recta
 (1) *per prop.* ZB, est contingenti perpendicularis (1), igitur angulus
 18. l. 3. ZBC est rectus, angulus vero ABC rectus est (2), &
 (2) *per hyp.* ergo ZBC ipsi ABC æquatur, pars toti, quod absurdum.
potb. Non est igitur Z centrum, & similiter nec aliud quodvis
 punctum extra rectam AB.

PROP. XX. THEOR.

Fig. 27, 28, & 29. Vide N. **A**ngulus (*ACD*) ad centrum, anguli (*ABD*) ad circumferentiam duplus est, quando eandem partem circumferentiæ habent pro basi.

Fig. 27. Primùm, habeant anguli crus alterum ACB commune; & quoniam in triangulo DCB latera DC & BC æquantur, anguli CBD & CDB æquales sunt (1), angulus vero externus ACD utrisque simul æqualis est (2), & ergo ipsius ABD duplus est.
 (1) *per prop.* 5. l. 1.
 (2) *per prop.* 16. l. 1.

Fig. 28. Secundò; cadat angulus ACD intra angulum ABD & ducatur BCE. Et quoniam angulus ACE æqualis est duplo angulo ABC (3), angulus vero DCE æqualis duplo angulo DBC (3), erit totus ACD æqualis duplo ABC cum duplo BDC, & ergo æqualis duplo ipsius ABD.
 (3) *per par. prim.*

Fig. 29. Tertiò; Secetur crus alterutrum anguli ACD crure anguli ABD, & ducatur BCE. Et quoniam angulus ECD æqualis est duplo angulo EBD (4), seu duplo angulo EBA cum duplo angulo ABD, angulus vero ECA æqualis est duplo angulo EBA (4), his æqualibus desumptis utrinque, erit angulus ACD duplo angulo ABD æqualis.
 (4) *per par. prim.*

PROP. XXI. THEOR.

Fig. 30. & 31. **I**N circulo anguli (*BAD, BED*) qui sunt in eodem segmento, sunt æquales.

Fig. 30. Sit primùm segmentum BAD semicirculo majus, & sit C centrum circuli, & ducantur CB & CD.

(1) *per prop.* 20. l. 3. Quoniam igitur angulus BCD ad centrum utriusque BAD & BED ad circumferentiam duplus est (1), erunt ipsi BAD & BED æquales (2).
 (2) *per ux.* 7.

Secundò,

Secundò, sit segmentum BAD vel semicirculus, vel *Fig. 31.*
semicirculo minus, & sit C centrum circuli, & ducantur
ACF & EF.

Quoniam igitur segmentum BDF semicirculo majus
est, in ipso vero sunt anguli BAF & BEF, erit BAF ipsi
BEF æqualis (3), & quoniam segmentum FAD semicir- (3) *per par.*
culo majus est, in ipso vero sunt anguli FAD & FED, *præc.*
erit FAD ipsi FED æqualis (3), duo igitur BAF &
FAD, seu angulus BAD, duobus BEF & FED, seu an-
gulo BED, æquales sunt.

Cor. Si super eodem arcu BD insistant duo anguli *Fig. 32.*
æquales, & vertex alterutrius BAD, sit in circumfe-
rentiâ oppositâ, erit quoque vertex alterius in eâdem cir-
cumferentiâ.

Non enim, sed, si fieri potest, cadat vel extra, vel
intra, ut ad F, & ducatur ED. Et quoniam anguli
BAD & BED sunt in eodem segmento, erit BAD ipsi
BED æqualis (1), est vero BAD ipsi BFD æqualis (2), (1) *per prop.*
& ergo æquantur BED & BFD; est vero alter ipforum 21. l. 3.
altero major (3), quod absurdum. Non igitur cadit (2) *per by-*
punctum F vel intra vel extra circulum, & ergo cadit in *potb.*
ipsam circumferentiam. (3) *per prop.*
16. l. 1.

PROP. XXII. THEOR.

Quadrilateri (*FABC*) in circulo inscripti, an- *Fig. 33.*
guli oppositi duobus rectis æquales sunt.

Ducantur enim AC & FB, & quoniam anguli ACB
& AFB sunt in eodem segmento AFCE, est ACB ipsi
AFB æqualis (1), & quoniam anguli ACF & ABF sunt (1) *per prop.*
in eodem segmento ABCF, est ACF ipsi ABF æqualis 21. l. 1.
(1), totus igitur BCF duobus simul AFB & ABF æqua-
tur; sunt vero AFB & ABF cum FAB duobus rectis
æquales (2), & ergo BCF cum ipso FAB duobus rectis (2) *per prop.*
æqualis est. Similiter demonstrari potest ABC & AFC 32. l. 1.
duobus rectis esse æquales.

Cor. Si quadrilateri in circulo inscripti, latus quod- (1) *per prop.*
vis producat, erit angulus externus interno remoto *præc. 3.*
æqualis, singulus enim cum interno adjacente duobus *prop. 13.*
rectis æquatur (1). l. 1.

PROP. XXIII. THEOR.

Fig. 34. **S**uper eâdem rectâ duo circulorum segmenta similia,
& non sibi mutuo congruentia, ex eâdem parte non
constituentur,

Constituantur enim, si fieri potest, & sint ACB & ADB,
& cadat punctum quodvis D alterutrius extra alterum, &
ducantur DA, DB & CB.

Quoniam igitur segmenta ACB & ADB similia sunt, in
ipsis vero sunt anguli ACB & ADB, est ACB ipsi ADB
(1) per def. æqualis (1), est vero ACB ipsi ADB externus & proinde
10. l. 3. islo major (2), quod absurdum. Non igitur cadit punc-
(2) per prop. tum quodvis segmenti alterutrius extra alterum, & igitur
16. l. 1. congruunt.

PROP. XXIV. THEOR.

Fig. 35. **S**imilia segmenta circulorum, super æqualibus rectis
(AB & CD) constituta, sunt æqualia.

Si enim ita sibi applicentur æquales rectæ AB & CD,
(1) per ax. ut punctum A caderet in C, caderet quoque B in D & igi-
10. tur rectæ congruerent (1), & ergo ipsa quoque segmenta
(2) per prop. congruerent (2), & proinde æqualia sunt.
23. l. 3.

PROP. XXV. PROB.

Fig. 36. **C**irculi segmento (ABC) dato, describere circum-
Vide N. **Q**uod est segmentum.

Subtendantur duæ rectæ, non parallelæ, AB & CD,
bisecentur, & per puncta bisectionis F & E ducantur duæ
rectæ FO & EO ipsis AB & CD perpendiculares, harum
intersectio O est centrum.

Quoniam enim recta AB in circulo terminata bise-
(1) per cor. catur perpendiculari FO, transit FO per centrum (1), similiter
prop. 1. l. 3. transit quoque EO per centrum, & ergo est centrum in
ipsarum FO & EO intersectione.

PROP.

PROP. XXVI. THEOR.

IN æqualibus circulis (ABC , DEF), æquales anguli (AOC & DHF , ABC & DEF), five sint *Fig. 37.*
ad centrum five ad circumferentiam, æqualibus arcibus
insistunt.

Si dati sint anguli AOC & DHF ad centrum, consti-
tuantur anguli ABC & DEF ad circumferentiam super
arcibus iisdem, & ducantur AC & DF .

Quoniam igitur in triangulis AOC & DHF anguli O &
 H æquales sunt (1), latera vero AO & OC lateribus DH & HF æqualia (1), æquantur quoque bases AC & DF ; sed sunt anguli ABC & DEF æquales (2), & ergo (2) *per prop. 50. & ax. 7.*
segmenta ABC & DEF sunt similia (3), constituuntur vero super rectis æqualibus AC & DF & proinde æquantur (4), his igitur desumptis a circulis æqualibus manent arcus AGC & DKF æquales. *(3) per def. 10. l. 3. (4) per prop. 24. l. 3.*

Similiter si dati sint anguli ad circumferentiam ABC &
 DEF acuti, ductis OA & OC , & quoque HD & HF
demonstrari possunt arcus AGC & DKF esse æqua-
les.

Si vero dati sint anguli ad circumferentiam aut recti aut
rectis majores, bisecentur. & erunt ipsorum semisses æqua-
les, ostendique potest, ut supra, arcus quibus hi semisses
insistunt esse æquales, & igitur toti arcus æquantur.

PROP. XXVII. THEOR.

IN æqualibus circulis (ABC , DEF), anguli (ABC , DEF) qui æqualibus arcibus insistunt, five sint *Fig. 38.*
ad centrum, five ad circumferentiam, æquantur.

Non enim, sed, si fieri potest, sit alterutra ex ipsis
 DEF major, & constituatur angulus DEG ipsi ABC æqua-
lis.

Quoniam igitur in circulis æqualibus ABC & DEF , (1) *per con-*
angulus ABC angulo DEG æqualis est (1), erunt arcus AHC & DKG æquales (2), sunt vero AHC & DKF æquales (1), & ergo DKG ipsi DKF æquatur, pars toti, quod absurdum. Non est igitur angulus alteruter altero major, & proinde sunt æquales. *(2) per prop. 26. l. 3.*

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR.

Fig. 39.

IN æqualibus circulis (ABC , DEF), æquales rectæ (AC & DF) æquales arcus auferunt, majorem majori (ABC ipsi DEF), & minorem minori (AGC ipsi DHF).

Si æquales rectæ sint diametri, patet propositio.

Si vero non, sint K & L centra circulorum & ducantur KA , KC , LD & LF .

(1) per by-
poth.

(2) per prop.
8. l. 1.

(3) per prop.
26. l. 3.

Quoniam igitur circuli æquales sunt (1), erunt AK & KC ipsis DL & LF æquales, sunt vero AC & DF æquales (2), & ergo angulus AKC angulo DLF æqualis est (3), est igitur arcus AGC arcui DHF æqualis (3); & quoniam circuli quoque æquantur, his æqualibus ab ipsis deductis erunt & arcus ABC & DEF æquales.

PROP. XXIX. THEOR.

Fig. 39.

IN circulis æqualibus (ABC , DEF), rectæ (AC & DF) quæ arcus æquales subtendunt, sunt etiam ipsæ æquales.

Si arcus æquales sint semicirculi, patet propositio.

Si vero non, sint K & L centra circulorum, & ducantur AK , KC , DL & LF ,

(1) per
byth.

(2) per prop.
27. l. 3.

(3) per by-
poth. & def.

1. l. 3.

(4) per prop.
4. l. 1.

Quoniam igitur arcus AGC & DHF æquantur (1), erunt anguli AKC & DLF æquales (2), sunt vero in triangulis AKC & DLF latera quoque AK , KC , lateribus DL , LF æqualia (3), & proinde sunt bases AC & DF æquales (4.)

Schol. Quæ quatuor præcedentibus propositionibus demonstrantur de circulis æqualibus, vera sunt quoque de eodem.

PROP. XXX. PROB.

Fig. 40.

Datum arcum (ABC) bifariam secare.

Ducatur AC & bisecetur in E , per E ducatur EB ipsi AC perpendicularis, & bisecabit arcum in B .

Ducantur

Ducantur enim AB & CB, & in triangulis AEB, CEB erunt latera AE & EC æqualia (1), EB vero (1) *per conf.* commune, & angulus AEB angulo CEB æqualis (1), æquantur igitur AB & BC (2), & ergo æquales sunt (2) *per prop.* arcus quos subtendunt (3), & proinde datus arcus bise- 4. l. 1. catur in B. (3) *per prop.* 28. l. 3.

PROP. XXXI. THEOR.

IN circulo, angulus qui in semicirculo, rectus est; Fig. 41. 42. qui vero in majori segmento, minor est recto; & 43. qui in minori, major recto. Vide N.

Pars. I. Angulus in semicirculo ABC est rec- Fig. 41. tus.

Sit enim O centrum circuli, & ducantur OB & AC. Quoniam igitur in triangulo AOB latera OB & OA æquantur, erunt quoque anguli OAB & OBA æquales (1) *per prop.* (1); similiter OCB & OBC æquantur; est igitur an- 5. l. 1. gulus ABC duobus simul BAC & BCA æqualis, & (2) *per cor.* 1. P. 32. l. 1. igitur angulus ABC est rectus (2).

Pars. II. Angulus ABC in segmento majori, Fig. 42. minor est recto.

Ductâ enim AD circuli diametro, ducantur CD & CA. Quoniam igitur in triangulo ACD, angulus ACD (3) *per par.* in semicirculo est rectus (3), erit angulus ADC recto 4. *per cor.* minor (4), sunt vero anguli ADC & ABC in eodem P. 17. l. 1. segmento ABDC & ergo æquales (5), & proinde angulus ABC est quoque recto minor. (5) *per prop.* 21. l. 1.

Pars. III. Angulus ABC in segmento minori est Fig. 43. recto major.

Sumatur enim in circumferentiâ oppositâ punctum quodvis D, & ducantur DA & DC.

Quoniam igitur in quadrilatero ABCD, duo anguli oppositi B & D duobus rectis æquantur (6), angulus (6) *per prop.* vero D in segmento majore, angulo recto est minor (7), 22. l. 3. erit angulus B recto major. (7) *per par.* *prac.*

B, & segmentum ejus ACB continebit angulum æqualem dato V acuto, segmentum vero AGB angulum æqualem dato V obtuso.

Recta enim EF circumulum contingit in A (3), & ab (3) *per const.*
A ducta est AB quæ circumulum secat, angulus igitur in ⁵ P. 16.
segmento ACB angulo EAB (4) & ergo dato V acuto ^{1. 3.}
(5) æqualis est; & quoque angulus in segmento AGB ^{(4) per prop.}
angulo FAB (4) & ergo dato V obtuso (5) æqualis (5) ^{32. l. 3.} *per const.*
est.

PROP. XXXIV. PROB.

A Dato circulo (ABC) segmentum abscindere Fig. 47.
quod capiat angulum dato (V) æqualem.

Ducatur FA circumulum in puncto quovis A contingens,
& ad A cum rectâ AF constituatur angulus FAC dato
V æqualis, segmentum ABC capiet angulum dato V
æqualem.

Quoniam enim FA circumulum contingit, AC vero ip-
sum secat, erit angulus in segmento ABC æqualis an- ^{(1) per prop.}
gulo FAC (1), & ergo dato V (2). ^{32. l. 3.}
^{(2) per const.}

PROP. XXXV. THEOR.

SI in circulo duæ rectæ (AB & CD) sese mu- ^{Fig. 48, 49,}
tuo secant, rectangulum sub segmentis (AE & ^{50.}
EB) unius, æquale est rectangulo sub segmentis
(CE & ED) alterius.

Cas. I. Si ambæ transeant per centrum in ipso bi-
secantur, & ergo rectangula sub ipsarum segmentis
æqualia sunt quadratis ex ipsarum dimidiis, & proinde
æquantur inter se.

Cas. II. Si una DC transeat per centrum & alteram ^{Fig. 48.}
AB non transeuntem per centrum secet perpendiculari-
ter, ducatur OB; & quoniam DC secatur æqualiter in
O, inæqualiter vero in E, erit rectangulum sub DE &
EC cum quadrato ex OE æquale quadrato ex OC (1), ^{(1) per prop.}
seu quadrato ex OB, & ergo quadratis ex OE & EB ^{5. l. 2.}
(2), commune auferatur quadratum ex OE & erit rec- ^{(2) per prop.}
tangulum sub DE & EC æquale quadrato ex EB, seu, ^{47. l. 1.}
K propter

(3) *per prop.* propter æquales AE & EB (3), rectangulo sub AE
3. l. 3. & EB.

Fig. 49. *Cas. III.* Si una DC transeat per centrum & alteram AB non transeuntem per centrum secet obliquè, ducatur OF ipsi AB perpendicularis & quoque OA; & quoniam DC secatur æqualiter in O, inæqualiter verò in E, erit rectangulum sub DE & EC cum quadrato ex OE, seu quadratis ex OF & FE (4), æquale quadrato ex OC (5), seu quadrato ex OA, & ergo quadratis ex OF & FA (4),
(4) *per prop.* 47. l. 1. commune auferatur quadratum ex OF, & erit rectangulum sub DE & EC cum quadrato ex FE æquale quadrato ex FA; quoniam vero OF ipsi AB perpendicularis est, ipsam bisecat (6), & ergo rectangulum sub BE & EA cum quadrato ex FE, æquale est quadrato ex FA (7), seu
(6) *per prop.* 3. l. 3. rectangulo sub DE & EC cum quadrato ex ipsa FE,
(7) *per prop.* 5. l. 2. commune auferatur quadratum ex FE, & erit rectangulum sub BE & EA æquale rectangulo sub DE & EC.

Fig. 50. *Cas. IV.* Si vero neutra ipsarum transeat per centrum, ducatur per intersectionem diameter FG, & erit rectangulum sub FE & EG æquale rectangulo sub DE & EC, & quoque rectangulo sub BE & EA (8), est igitur rectangulum sub DE & EC æquale rectangulo sub BE & EA (9).
(8) *per par.*
præc.
(9) *per ax.* 1.

PROP. XXXVI. THEOR.

Fig. 51 & 52. **S**I a puncto (B) extra circumulum ducantur ad ipsum due rectæ, quarum altera (BC) secet ipsum, altera vero (BF) contingat, erit rectangulum sub totâ secante (BC) & segmento externo (BO) æquale quadrato ex contingente.

Fig. 51. *Cas. I.* Si transeat BC per centrum, ducatur AF; & quoniam recta CO bisecatur in A eique recta quædam OB adjecta est, erit rectangulum sub totâ CB & adjectâ BO cum quadrato ex AO æquale quadrato ex AB (1), & ergo quadratis ex AF & FB (2), ablatis igitur æqualibus quadratis ex AO & AF, erit rectangulum sub CB & BO æquale quadrato ex BF (3).
(1) *per prop.* 6. l. 2.
(2) *per prop.* 47. l. 1.
(3) *per ax.*

Fig. 52. *Cas. II.* Si BC non transeat per centrum, ducatur AL ipsi perpendicularis, & quoque AO, AB & AF; & quoniam CO bisecatur in L (4), eique recta quædam OB adjecta est, erit rectangulum sub CB & BO cum quadrato

quadrato ex LO æquale quadrato ex LB (5), addatur (5) *per prop.*
 utrinque quadratum ex AL & erit rectangulum sub CB ^{6. l. 2.}
 & BO cum quadratis ex AL & LO, seu quadrato ex
 AO (6), æquale quadratis ex AL & LB, & ergo qua- (6) *per prop.*
 drato ex AB (6), seu quadratis ex AF & FB (6), ab- ^{47. l. 1.}
 latis igitur æqualibus quadratis ex AO & AF, erit
 rectangulum sub CB & BO æquale quadrato ex BF
 (7). ^{(7) per ax.}

Cor. 1. Hinc si a puncto quovis extra circulum du- ^{3.}
 cantur duæ rectæ ipsum secantes, erunt rectangula sub
 ipsis & segmentis suis externis æqualia, singulum enim
 æquatur quadrato contingentis.

Cor. 2. Si ab angulo A trianguli BAC demittatur in *Fig. 54.*
 latus oppositum perpendicularis AL, erit rectangulum
 sub summâ & differentiâ laterum AB & AC æquale rect-
 angulo sub summâ & differentiâ rectarum BL & LC
 interceptarum inter perpendicularem & terminos la-
 teris in quod incidit.

Centro enim A & intervallo AC describatur circulus,
 & quoniam rectæ BE & BC circulum secant, erit rect-
 angulum sub EB & DB rectangulo sub CB & BO æquale ^{(1) per cor.}
 (1), est vero AE ipsi AC æqualis & ergo EB summæ ip- ^{prac.}
 sarum AC & AB æquatur, AD vero quoque ipsi AC
 æqualis est, & ergo BD differentiæ inter ipsas AC & AB
 æquatur, & proinde rectangulum sub EB & DB rectan-
 gulum est sub summâ & differentiâ ipsarum AB & AC,
 sed quoniam AL ipsi CO perpendicularis est, sunt OL ^{(2) per prop.}
 & LC æquales (2), & ergo cum perpendicularis cadit ^{3. l. 3.}
 intra triangulum, BO æqualis est differentiæ intercepta-
 rum BL & LC, BC vero ipsarum summa est, & cum
 perpendicularis cadit extra triangulum, BO æqualis est
 summæ interceptarum, & BC ipsarum differentia est, &
 proinde rectangulum sub BC & BO rectangulum est sub
 summâ & differentiâ interceptarum BC & BL, est vero
 æquale rectangulo sub summâ & differentiâ laterum AB
 & AC.

PROP. XXXVII. THEOR.

Fig. 53.

SI a puncto (B) extra circulum ducantur ad ipsum due rectæ, altera quidem (BC) secans, altera vero (BF) in ipsum incidens, & sit rectangulum sub secante & segmento ejus externo æquale quadrato ex incidente, incidens (BF) circulum continget.

Ducatur enim a B recta BQ circulum contingens, & ducantur quoque EF & EQ.

Quoniam igitur recta BC circulum secat, BQ vero ipsum contingit, erit quadratum ex BQ æquale rectangulo sub BC & BO (1), est vero quadratum ex BF rectangulo sub BC & BO æquale (2), & ergo æquantur quadrata ex BQ & BF & proinde ipsæ rectæ æquales sunt (3), sunt igitur in triangulis EFB & EQB, latera EF & FB lateribus EQ & QB æqualia, latus vero EB commune, & ergo angulus EFB angulo EQB æqualis (4), sed est angulus EQB rectus (5), & ergo angulus EFB est rectus, & proinde recta BF circulum contingit (6).

(1) per prop. 36. l. 3.
 (2) per by-poth.
 (3) per cor. 2. P. 46. l. 1.
 (4) per prop. 8. l. 1.
 (5) per prop. 18. l. 3.
 (6) per prop. 16. l. 3.

E U C L I D I S
ELEMENTORUM.

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

1. **F**igura rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando unusquisque angulus ejus circuli circumferentiam tangit. *Fig. 1. l. 4. Tab. quarta. Vide N.*
2. Figura rectilinea circa circumferentiam dicitur circumscribi, quando unumquodque latus ejus circuli circumferentiam contingit. *Fig. 1.*
3. Circulus in figurâ rectilineâ inscribi dicitur, quando unumquodque latus figuræ, ejus circumferentiam contingit. *Fig. 1.*
4. Circulus circa figuram rectilineam circumscribi dicitur cum unusquisque angulus figuræ ejus circumferentiam tangit. *Fig. 1.*
5. Recta linea in circulo inscribi dicitur quando ejus termini in circuli circumferentia fuerint.

P R O P.

PROP. I. PROB.

Fig. 2. **I**N dato circulo (*BCA*) datæ rectæ (*D*) quæ diametro non sit major, æqualem inscribere.

Ducatur dati circuli diameter *AB*, & si hæc æqualis sit datæ *D*, factum erit quod proponebatur.

(1) *per prop.*
3. 1. 1.

(2) *per def.*
15. 1. 1.

(3) *per const.*
6^o ax. 1.

Si non, sumatur in eâ *AE* ipsi *D* æqualis (1), & centro *A* intervallo *AE* describatur circulus *ECF*, & ad alterutram intersectionem ejus cum dato circulo, ducatur recta *AC*, erit hæc æqualis ipsi *AE* (2) et ergo datæ *D* (3).

PROP. II. PROB.

Fig. 3. **I**N dato circulo (*BAC*) triangulum inscribere, dato triangulo (*EDF*) æquiangulum.

Ducatur recta *GH* datum circum in puncto quovis *A* contingens, & ad punctum *A* cum rectâ *AH* constituatur angulus *HAC* angulo *E* æqualis, & ad idem punctum cum rectâ *AG* constituatur *GAB* angulo *F* æqualis, & ducatur *BC*.

(1) *per const.*

(2) *per prop.*
32. 1. 3.

Quoniam angulus *E* angulo *HAC* æqualis est (1), angulus vero *HAC* angulo *B* in alterno segmento æquatur (2), anguli *E* & *B* æquales sunt; similiter *F* & *C* sunt æquales, reliquus ergo *D* reliquo *BAC* æquatur, & igitur triangulum *BAC* inscriptum in circulo dato, triangulo dato *EDF* æquiangulum est.

PROP. III. PROB.

Fig. 4.
Vide N.

Circa datum circum (*ABC*) triangulum circumscribere, dato triangulo (*DEF*) æquiangulum.

Producatur dati trianguli latus quodvis *DF* utrinque ad *G* & *H*, & sumatur circuli dati centrum *K*, & ducta utcunque *KA*, constituatur ad punctum *K* & cum rectâ *KA* angulus *BKA* angulo *EDG* æqualis, & ad idem punctum *K* constituatur cum ipsâ *KA* ad alteras partes angulus *AKC* angulo *EFH* æqualis, & ducantur rectæ *LM*, *LN* & *MN*, circum in punctis *B*, *A* & *C* contingentes.

Quoniam

Quoniam igitur quadrilateri LBKA quatuor anguli quatuor rectis æquales sunt (1), anguli vero KBL & KAL sunt recti (2), erunt reliqui AKB & ALB simul duobus rectis æquales, sed anguli EDG & EDF simul duobus rectis sunt æquales (3), & ergo anguli AKB & ALB simul, angulis EDG & EDF simul æquantur, æquales vero sunt AKB & EDG (4), & ergo ALB & EDF æquantur. Similiter demonstrari potest angulos ANC & EFD æquales esse; reliquus igitur M reliquo E æquatur (5), & proinde triangulum LMN circulo ABC circumscriptum, dato triangulo æquiangulum est.

(1) per cor.
6. p. 32. l. 1.
(2) per prop.
18. l. 3.
(3) per prop.
13. l. 1.
(4) per const.
(5) per cor.
2. p. 32.
l. 1.

PROP. IV. PROB.

IN dato triangulo (BAC) circulum inscribere.

Fig. 5.
Vide N.

Bisecentur duo quivis anguli B & C rectis BD & CD, & a puncto in quo rectæ bisecantes concurrunt ducatur ad quodvis latus BC trianguli BAC perpendicularis DF, circulus centro D & intervallo DF descriptus erit in dato triangulo inscriptus.

Ducantur enim DE & DG ipsis BA & AC perpendiculares, & quoniam in triangulis DEB, DFB anguli DEB & DBE angulis DFB & DBF æquales sunt (1), latus vero DB commune est, erunt latera DE & DF æqualia (2); similiter demonstrari potest rectas DG & DF æquales esse; tres igitur DE, DF & DG inter se sunt æquales (3), & proinde circulus centro D & intervallo DF descriptus transit per E & G, & quoniam anguli ad F, E & G recti sunt, rectæ BC, BA & AC ipsum contingunt (4), & proinde circulus FEG triangulo dato inscribitur.

(1) per const.
(2) per prop.
26. l. 1.
(3) per ax.
(4) per prop.
16. l. 3.

PROP. V. PROB.

Circa datum triangulum (BAC) circulum circumscribere.

Fig. 6, 7 & 8.

Bisecentur duo quævis latera BA & AC dati trianguli in D & E, & per D & E ducantur DF & EF ipsis AB & AC perpendiculares, & ab earum concursu F ducatur ad quemvis angulum A trianguli BAC recta FA; circulus centro F & intervallo FA descriptus, erit dato triangulo circumscriptus.

Ducantur

Ducantur enim FB & FC, & quoniam in triangulis
 (1) *per const.* FDA, FDB latera DA & DB æqualia sunt (1), FD vero
 commune, & anguli ad D recti (1), erunt latera FA &
 (2) *per prop.* FB æqualia (2); similiter demonstrari potest rectas FA &
 4. l. 1. FC æquales esse, tres igitur rectæ FA, FB & FC sunt
 (2) *per ax.* æquales (2), & proinde circulus centro F & intervallo
 1 FA descriptus, transibit per B & C, & ergo dato trian-
 gulo BAC circumscriptus est.

Schol. Idem est hoc problema ac per tria data puncta
 non in directum posita circulum describere.

Fig. 6. Cor. 1. Si centrum F cadat intra triangulum patet
 (1) *per prop.* omnes angulos esse acutos, singulus enim est in segmento
 31. l. 3. semicirculo majore (1). Si vero centrum F sit in latere
 Fig. 7. quovis trianguli, angulus isti lateri oppositus erit rectus,
 Fig. 8. est enim angulus in semicirculo (1). Et si centrum extra
 triangulum cadat, angulus oppositus isti lateri ad cuius
 partes centrum cadit, erit obtusus, est enim in segmento
 semicirculo minore (1).

Fig. 9. Cor. 2. Circa quadrilaterum AFDC, cujus anguli
 oppositi duobus rectis æquantur, circulus describi potest;
 ductâ enim diagonali, circulus descriptus circa triangulum
 FAC transibit per D. Sumatur enim in arcu FDC punc-
 tum quodvis B & ducantur BF & BC, & in quadrilatero
 AFBC circulo inscripto, erunt anguli A & B duobus
 (1) *per prop.* rectis æquales (1), sunt vero D & A duobus rectis æqua-
 22. l. 3. les (2), ergo æquantur B & D, & quoniam alter eorum
 (2) *per by-* B est ad circumferentiam, erit reliquus D ad eandem cir-
 29. l. 3. *posib.* cumferentiam (3), & ergo circulus per D transit, & qua-
 (3) *per cor.* drilatero AFDC circumscriptus est.
 P. 21. l. 3.

PROP. VI. PROB.

Fig. 10. **I**N dato circulo (ABCD) quadratum inscribere.
 Vide N.

Ducantur diametri AC, BD dati circuli ad rectos inter
 se angulos, & ductis AB, BC, CD, DA, erit ABCD qua-
 dratum in circulo dato inscriptum.

Nam quoniam anguli ad centrum E recti sunt & proinde
 (1) *per schol.* æquales, erunt arcus quibus insunt æquales (1), & ergo
 P. 29. l. 3. subtensæ æquantur (2), est proinde ABCD æquilaterum,
 (2) *per prop.* & quoniam BD diameter est dati circuli erit BAD angu-
 29. l. 3. *sch. ejus.* lus in semicirculo & proinde rectus (3), similiter demon-
 (1) *per prop.* strari
 31. l. 3.

strari potest reliquos angulos B, C & D esse rectos, & cum latera quoque æqualia sunt, erit ABCD quadratum.

PROP. VII. PROB.

Circa datum circulum (ABCD) quadratum circumscribere. Fig. 11.
Vide N.

Ducantur dati circuli duo diametri AC, BD ad rectos inter se angulos, & per terminos eorum A, B, C & D ducantur rectæ KF, FG, GH, HK, circulum contingentes, erit FGHK quadratum circulo circumscriptum.

Nam quoniam EA ducta est a centro ad contactum, erit angulus EAF rectus (1), est vero angulus AEB rectus (2), & ergo parallelæ sunt rectæ FK & BD (3); similiter demonstrari potest GH ipsi BD parallelam esse, & quoque FG & KH ipsi AC esse parallelas, sunt proinde GD, BK, FC & AH parallelogramma; & quoniam anguli ad A recti sunt, anguli ad G & H ipsis oppositi erunt recti (4), & similiter demonstrari potest K & F esse rectos; est igitur FGHK rectangulum; & quoniam AC & BD æquales sunt, FK vero & GH ipsi BD, & FG & KH ipsi AC æquantur (5), patet FGHK esse quoque æquilaterum, & proinde quadratum.

Cor. Quadratum circulo circumscriptum duplum est quadrati inscripti, æquatur enim quadrato ex diametro circuli, hoc vero duplum esse quadrati inscripti patet ex prop. 47. 1. 1.

PROP. VIII. PROB.

In dato quadrato (FGHK) circulum inscribere. Fig. 11.

Bisecentur latera duo adjacentia GH & FG dati quadrati in C & B, & per C ducatur CA alterutri FG vel KH parallela, & per B ducatur BD alterutri GH vel FK parallela, circulus centro E & intervallo EC descriptus, dato quadrato inscriptum erit.

Nam quoniam GE, EH & EF sunt parallelogramma (1), erunt ipsorum latera opposita æqualia (2); proinde

L

de 34. 1. 1.

- (3) *per const.* de cum propter æquales GH & FG bisectas (3), ipsarum semisses GC & GB æquantur, erunt CE & EB, ipsis GB & GC æquales (2), inter se quoque æquales; reliquæ vero ED & EA ipsis CE & EB æquales sunt quoniam ipsis CH & BF, quæ semisses sunt ipsarum GH & FG, æquantur (4); quatuor igitur EC, EB, EA & ED inter se æquales sunt, & ergo circulus centro E & intervallo EC descriptus transibit per B, A & D, & quoniam anguli ad C, B, A & D recti sunt, circulus iste continget latera dati quadrati (5), & ergo in ipso inscribitur.
- (4) *per prop.* 34. l. 1.
- (5) *per prop.* 16. l. 3.

PROP. IX. PROB.

Fig. 10.

Circa datum quadratum (ABCD) circulum circumscribere.

Ducantur AC & BD sese interfecantes in E; circulus centro E per A descriptus transibit per B, C & D.

- Nam quoniam in triangulo isoscele ABC, angulus B rectus est, reliqui erunt semirecti (1), similiter demonstrari potest omnes angulos in quos anguli quadrati ab AC & BD dividuntur esse semirectos, & igitur sunt inter se omnes æquales; ergo in triangulo AEB, quoniam anguli EAB & EBA æquales sunt, latera EA & EB æquantur (2), similiter demonstrari potest reliquos ED & EC ipsis EA & EB æquales esse, quatuor igitur EA, EB, EC & ED æquantur, & proinde circulus centro E per A descriptus transibit per B, C & D, et ergo dato quadrato circumscriptus erit.
- (1) *per cor.* 3. P. 32. l. 1.
- (2) *per prop.* 6. l. 1.

PROP. X. PROB.

Fig. 12.

Triangulum Isosceles constituere habens angulum utrumque ad basim, duplum anguli ad verticem.

- Sumatur recta quævis AB, & secetur in C ita ut rectangulum sub AB & CB quadrato ex AC æquale sit (1), & centro A intervallo vero AB describatur circulus BED in quo inscribatur recta BD ipsi AC æqualis (2), ductâ AD, erit BAD triangulum isosceles & uterque angulus B & D anguli A duplus erit.
- (1) *per prop.* 11. l. 2.
- (2) *per prop.* 1. l. 4.

Ducatur

Ducatur enim DC, & triangulo DCA circumscribatur circulus ACD.

Quoniam rectangulum sub AB & BC æquatur quadrato ex AC (3), & ergo quadrato ex BD ipsi AC æquali (3), (3) *per const.* recta BD continget circulum ACD (4), & ergo angulus (4) *per prop.* BDC angulo A in segmento alterno æqualis est (5), ad- 37. l. 3. datur utrinque CDA, & erit BDA ipsis CDA & A simul (5) *per prop.* æqualis; sed quoniam latera AB & AD æquantur, erunt 32. l. 3. anguli B & BDA æquales, ergo angulus B ipsis CDA & A simul æquatur; externus vero angulus BCD angulis CDA & A æqualis est (6), ergo æquantur B & BCD, & (6) *per prop.* proinde latera BD & CD æquantur (7), sed æquales 32. l. 1. sunt BD & CA (8), ergo CD & CA æquales sunt, (7) *per prop.* & igitur anguli A & CDA æquales sunt, sed angulus 6. l. 1. BDA ipsis A & CDA æqualis est, ergo ipsius A duplus (8) *per const.* est, & ergo angulus B ejusdem anguli A duplus est.

Schol. Patet triangulum BDC esse isosceles cujus uterque angulus ad basem BC duplus est anguli BDC ad verticem; triangulum vero ACD esse isosceles cujus angulus ad verticem ACD utriusque ad basem triplus est, æqualis enim est angulis B & BDC simul (1), quorum alter (1) *per prop.* B anguli A duplus est, alter vero BDC ipsi æqualis. 32. l. 1.

Cor. Hinc patet quomodo super datâ rectâ BD pro basi constitui potest triangulum isosceles habens angulos ad basem duplos anguli ad verticem; constituatur enim tale triangulum CDB in quo data BD sit latus, & producta BC constituatur angulus BDA angulo B æqualis, concurrent BA & DA, & factum erit quod proponebatur.

PROP. XI. PROB.

IN dato circulo (ABCDE) pentagonum æquilaterum Fig. 13.
& æquiangulum inscribere. Vide N.

Constituatur triangulum isosceles habens angulum utrumque ad basem duplum anguli ad verticem (1), & in (1) *per prop.* dato circulo inscribatur ACE ipsi æquiangulum (2), bise- 10. l. 4. centur anguli ad basem A & E rectis AD & EB, & du- (2) *per prop.* cantur AB, BC, CD, DE & EA. 2. l. 4.

Quoniam igitur uterque angulus CAE & CEA ipsius ECA duplus est (3), bisecti vero sunt rectis AD & EB, (3) *per const.* erunt quinque anguli CEB, BEA, ACE, CAD, & DAE, inter se æquales, & ergo arcus quibus insistent sunt æqua-

(4) *per sch.* les (4), & ergo rectæ CB, BA, AE, ED, & DC hos
prop. 29. arcus subtendentes sunt quoque æquales (4), & ergo
l. 3. pentagonum ABCDE est æquilaterum.

Quoniam vero arcus AB & DE æquales sunt, addito
 communi BCD, erit arcus ABCD arcui BCDE æqualis,
 ergo anguli AED & BAE ipsis insistentes sunt quoque
 (5) *per sch.* æquales (5), & similiter demonstrari potest reliquos omnes
prop. 29. angulos esse æquales, & ergo est pentagonum ABCDE
l. 3. quoque æquiangulum.

Cor. 1. Hinc patet omnem figuram æquilateram cir-
 culo inscriptam esse quoque æquiangulam.

Fig. 13.

Cor. 2. Super datâ rectâ AE constitui potest penta-
 gonum æquilaterum, & æquiangulum, constituendo super
 ipsâ pro base triangulum isosceles ACE cujus angulus
 (1) *per cor.* uterque ad basem duplus sit anguli ad verticem (1), &
p. 10. l. 4. circa ipsum circulum circumscribendo, pentagonum in
 hoc inscriptum super datâ constitutum erit.

PROP. XII. PROB.

Fig. 14.

Circa datum circulum (ABCDE) pentagonum
 æquilaterum & æquiangulum circumscribere.

Sint puncta A, B, C, D & E vertices angulorum pen-
 tagoni æquilateri & æquianguli in dato circulo inscripti,
 & ducantur GH, HK, KL, LM & MG circulum in ipsis
 contingentes, erit pentagonum GHKLM, circulo dato
 circumscriptum, & æquilaterum & æquiangulum.

Ducantur enim FA, FG, FE, FM & FD; & quoniam
 in triangulis FGA, FGE, latera GA & GE æquantur,
 contingentes enim sunt ex eodem puncto G, & latera FA
 & FE quoque æqualia sunt, FG vero commune, erunt
 anguli FGA & FGE æquales, & quoque AFG & EFG
 (1) *per sch.* (1), est igitur AGE ipsius FGE duplus, & AFE ipsius
p. 8. l. 1. CFE duplus; similiter demonstrari potest DME ipsius
 FME duplum esse, & quoque DFE ipsius MFE. Quo-
 (2) *per const.* niam vero arcus AE & ED æquales sunt (2), anguli AFE
 (3) *per sch.* & EFD æquantur (3), & ergo ipsorum semisses GFE &
p. 29. l. 3. MFE æquales sunt, sed sunt quoque anguli FEG & FEM
 æquales & latus FE commune est, æquantur igitur anguli
 (4) *per prop.* FGE & FME & latera GE & EM (4), proinde recta
26. l. 1. GM ipsius GE dupla est, & similiter demonstrari potest
 GH ipsius GA duplam esse, æquales vero sunt GE & GA,
 & ergo

& ergo æquales quoque sunt GM & GH, & similiter demonstrari potest reliqua latera esse æqualia, est igitur pentagonum GHKLM æquilaterum. Quoniam vero anguli DME & AGE ipsorum FME & FGE dupli sunt, FME vero ipsi FGE æquatur, erit quoque DME ipsi AGE æqualis, & similiter demonstrari potest reliquos angulos esse æquales, & ergo est GHKLM quoque æquiangulum.

Schol. Similiter circa datum circulum circumscribi potest quævis figura æquilatera & æquiangula, talem prius inscribendo & per angulos ejus ducendo contingentes.

PROP. XIII. PROB.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo (*ABC-DE*) circulum inscribere. *Fig. 15.*

Bisecentur duo quivis anguli adjacentes A & E rectis AF & EF concurrentibus in F, & ab F ducatur FG ipsi AE perpendicularis, circulus centro F & intervallo FG descriptus dato pentagono inscriptus erit.

Ducantur enim FB, FC & FD, & in latera cadant ab F perpendiculares FH, FN, FM & FL.

Quoniam igitur in triangulis AFB, AFE latera AB & AE æqualia sunt (1), AF vero commune, & anguli FAB & FAE æquales (2), erunt quoque anguli ABF & AEF æquales (3), sed sunt ABC & AED æquales (1), & ergo quoniam AEF semissis est ipsius AED (2), est quoque ABF semissis ipsius ABC, & similiter demonstrari potest reliquos angulos bisectos esse rectis ad F ductis. In triangulis igitur FBH & FBN anguli FBH & FBN æquales sunt, anguli vero ad H & N recti, & latus FB, æqualibus H & N oppositum, commune, sunt proinde latera FH & FN æqualia (4), & similiter demonstrari potest reliquas omnes perpendiculares esse æquales, circulus igitur centro F per G descriptus transibit per H, N, M & L, & propter angulos ad G, H, N, M & L rectos, latera dati pentagoni in istis punctis continget. *(1) per hyp. (2) per conf. (3) per prop. (4) per prop. 26. l. 1.*

Schol. Eâdem prorsus methodo, in quâvis figurâ æquilaterâ & æquiangulâ, circulus potest inscribi.

PROP. XIV. PROB.

Fig. 16.

Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ($ABCDE$) circulum describere.

Bisecentur anguli A & E rectis AF & EF , & ab ipsarum concursu F per alterutrum punctum A vel E describatur circulus, hic transibit quoque per B , C & D .

Ducantur enim FB , FC & FD , & in triangulis FAE & FAB quoniam latera FA , AE lateribus FA , AB
 (1) per const. æquantur, & angulus FAE angulo FAB æqualis est (1),
 (2) per prop. erunt quoque anguli FBA & FEA æquales (2), & proinde quoniam anguli ABC & AED æquantur (3), FEA
 4. l. 1. (3) per hypo- vero ipsius AED semissis est (4), erit FBA ipsius ABC
 potb. quoque semissis, & ergo ABC ab ipsâ FB bisecatur, &
 (4) per const. similiter demonstrari potest reliquos angulos C & D esse bisectos. Quoniam igitur in triangulo AFE , anguli FAE & FEA æqualium BAE & AED sunt semisses, æquantur, & ergo latera FE & FA æqualia sunt (5),
 (5) per prop. & similiter demonstrari potest reliquas omnes rectas FB ,
 6. l. 1. FC & FD æquales esse, quinque igitur FA , FB , FC , FD & FE æquantur, & proinde circulus centro F per A descriptus transibit per B , C , D & E , & dato pentagono circumscribitur.

Schol. Eâdem prorsus methodo circa quamvis figuram æquilateram & æquiangulam circulus circumscribi potest.

PROP. XV. PROB.

Fig. 17.

In dato circulo ($ABCDEF$) hexagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Sumatur G centrum circuli dati, & ductâ diametro AGD , centro A describatur circulus per G , & per intersectiones B & F ducantur BE & FC circuli dati diametri; ductis AB , BC , CD , DE , EF & FA erit $ABCDEF$ hexagonum dato circulo inscriptum & æquilaterum & æquiangulum.

Quoniam enim AB & AG ejusdem circuli BGF sunt radii, æquantur, & quoniam GA & GB ejusdem circuli $ABCDEF$ sunt radii, æquantur; est igitur triangulum BGA

BGA æquilaterum, & ergo angulus BGA tertia pars est duorum rectorum (1), similiter AGF æquilaterum (1) *per cor.*
est & angulus AGF quoque tertia pars duorum rectorum, *4. P. 32.*
sed sunt BGA & AGF una cum FGE duobus rectis *1. 1.*
æquales (2), & ergo ipse FGE una tertia pars est duorum rectorum; tres igitur BGA, AGF & FGE sunt (2) *per cor.*
inter se æquales, & ergo ipsis verticales EGD, DGC & *1. P. 13. l. 1.*
CGB æquales sunt, & proinde sex anguli ad G æquantur,
& ergo arcus quoque quibus insistant (3), & proinde (3) *per sch.*
rectæ hos arcus subtendentes æquales sunt (3), est igitur *P. 29. l. 3.*
hexagonum ABCDEF æquilaterum, & ergo quoniam
circulo inscribitur est quoque æquiangulum (4). *(4) per sch.*
P. 11. l. 4.

Cor. 1. Latus hexagoni æquale est radio circuli in quo inscribitur.

Cor. 2. Bisectis arcibus AB, BC &c. inscribi potest *Fig. 17.*
figura duodecim laterum æqualium, & his iterum bisectis, figura viginti quatuor laterum & ita deinceps.

Cor. 3. Hexagonum æquilaterum & æquiangulum *Fig. 17.*
super datâ rectâ BA describi potest, describendo super datâ triangulum æquilaterum BGA, & centro G per A describendo circulum, & hexagonum in ipso inscribendo.

Cor. 4. Ductis AC, AE & CE inscriptum erit in *Fig. 17.*
dato circulo triangulum æquilaterum, cujus proinde latera bisecant radios ipsis perpendiculares. Sit enim GD lateri cuius CE perpendicularis & in triangulis DCK, GCK anguli ad K recti sunt, anguli vero DCK & GCK, æqualibus arcibus DE & EF insistentes, æquales (1), (1) *per sch.*
& latus CK inter angulos æquales commune, æquantur *P. 29. l. 3.*
igitur latera DK & GK (2), & proinde GD bisecatur. (2) *per prop.*
26. l. 1.

Cor. 5. Hinc sequitur quadratum ex latere trianguli æquilateri triplum esse quadrati ex radio circuli cui inscriptum est, si enim ducta fuerit AC quadratum ex *Fig. 17.*
ipsâ æquale foret quadratis ex AG & GC cum duplo *Vide N.*
rectangulo sub AG & GK (1), sed quoniam GK ipsius AG (1) *per prop.*
semissis est (2), duplum rectangulum sub AG & GK *12. l. 2.*
quadrato ex AG æquatur, & proinde quadratum ex AC (2) *per cor.*
duplo quadrato ex AG cum quadrato ex GC æqua-
tur, hoc est triplo quadrato ex radio. *præ.*

PROP. XVI. PROB.

Fig. 18.
Vide N.

IN dato circulo (*CAD*) quindecagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Trianguli æquilateri, quod circulo *CAD* inscribi potest, latus *CD* ipsi inscribatur, & quoque pentagoni æquilateri & æquianguli, quod circulo *CAD* inscribi potest, latus *CA* ipsi inscribatur, bisecetur *AD* & erit *AB* latus quindecagoni quæsitum.

Si enim dividatur tota circumferentia in quindecim partes, quoniam arcus *CD* tertia pars totius circumferentiæ est, quinque ex istis partibus in ipsâ continentur, & similiter in arcu *CA* tres ex ipsis continentur, & proinde in *AD* continentur duæ, & ergo est *AB* pars quindecima circumferentiæ totius, & *AB* igitur latus est quindecagoni.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M .

L I B E R Q U I N T U S .

D E F I N I T I O N E S .

1. **M**agnitudo magnitudinis pars aliquota vel submultiplex dicitur, minor majoris, quando minor metitur majorem.
2. Major dicitur multiplex minoris, quando majorem minor metitur.
3. Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis, secundum quantitatem, mutua quædam habitudo.
4. Rationem inter se habere magnitudines dicuntur, *Vide N.* quarum minor multiplicata majorem superare potest.
5. In eadem ratione magnitudines esse dicuntur, *Vide N.* prima ad secundam & tertia ad quartam, quando quoties submultiplex quævis primæ continetur in secundâ, toties æque submultiplex tertiæ continetur in quartâ.
6. Magnitudines quæ eandem rationem habent, proportionales vocentur.
7. Quando submultiplex quævis primæ sæpius continetur in secundâ, quam æque submultiplex tertiæ continetur in quartâ, tunc prima dicitur habere minorem rationem ad secundam quam tertia ad quartam; & contra, tertia ad quartam majorem rationem habere dicitur quam prima ad secundam. *Vide N.*
8. Proportio est rationum similitudo.
9. Proportio vero in tribus ad minimum terminis consistit.

M

10. Quando

10. Quando tres magnitudines proportionales sunt (A ad B ut B ad C) prima dicitur habere ad tertiam (A ad C) rationem duplicatam ejus quam habet ad secundam (scilicet rationis A ad B).

11. Quando quatuor magnitudines sunt deinceps proportionales (A ad B ut B ad C & B ad C ut C ad D) prima dicitur habere ad quartam (A ad D) rationem duplicatam ejus quam habet ad secundam (scilicet rationis A ad B). Et sic deinceps, una amplius, quotcunque fuerint proportionales.

Vide N.

12. Si fuerint quotcunque magnitudines ejusdem generis (A, D, C & F) prima dicitur habere ad ultimam (A ad F) rationem compositam ex ratione quam habet prima ad secundam, & secunda ad tertiam & tertia ad quartam (A ad D & D ad C & C ad F) & ita deinceps usque ad ultimam.

13. Homologæ magnitudines, in proportionalibus, appellantur antecedentes antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

Mutari potest vel ordo vel magnitudo proportionalium, ita ut tamen maneant proportionales, variis modis qui apud geometras nominibus sequentibus designantur.

Vide N.

14. Permutando; cum concluditur, si sint quatuor magnitudines, ejusdem generis, proportionales, primam esse ad tertiam ut secunda ad quartam, ut ostensum est in Prop. 33. Lib. 5.

15. Invertendo; cum concluditur, si sint quatuor magnitudines proportionales, secundam esse ad primam ut quarta ad tertiam. Prop. 20.

16. Componendo; cum concluditur, si sint quatuor magnitudines proportionales, primam una cum secundâ esse ad secundam, ut tertia una cum quartâ ad quartam. Cor. Prop. 21.

17. Dividendo; cum concluditur, si sint quatuor magnitudines proportionales, differentiam inter primam & secundam esse ad secundam, ut differentia inter tertiam & quartam ad quartam. Cor. 2. prop. 25.

18. Convertendo; cum concluditur, si sint quatuor magnitudines proportionales, primam esse ad summam vel differentiam ipsius & secundæ, ut tertia ad summam vel differentiam ipsius & quartæ. Prop. 21. & 25. & cor. 1. prop. 25.

19. Ex æquali, vel ex æquo; cum concluditur, si plures sint magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ si binæ sumantur sunt in eadem ratione, primam esse

ad

ad ultimam in priore serie, ut prima ad ultimam in posteriore.

Hujus duæ sunt species sequentes.

20. Ex æquo ordinatè; quando fuerit prima magnitudo ad secundam in priore serie, ut prima ad secundam in posteriore, & secunda ad tertiam in priore serie ut secunda ad tertiam in posteriore, & ita deinceps; & concluditur, ut supra, primam esse ad ultimam in priore serie ut prima ad ultimam in posteriore. *Prop. 34.*

21. Ex æquo perturbatè; quando fuerit prima magnitudo ad secundam in priore serie, ut penultima ad ultimam in posteriore; & secunda ad tertiam in priore serie, ut antepenultima ad penultimam in posteriore, & ita deinceps, & concluditur, ut supra, primam esse ad ultimam in priore serie ut prima ad ultimam in posteriore. *Prop. 38.*

Axiomata.

1. Eiusdem five æqualium æque multiplices, vel æque submultiplices, sunt æquales. *Vide N.*
2. Quarum eadem æque multiplex, vel æque submultiplex est, vel quarum æquales æque multiplices vel æque submultiplices sunt, & ipsæ inter se sunt æquales.
3. Multiplex vel submultiplex majoris, major est æque multiplice vel æque submultiplice minoris.
4. Magnitudo cujus multiplex vel submultiplex major est æque multiplice vel æque submultiplice alterius, illà alterà major est.

PROPOSITIO PRIMA. THEOREMA.

Fig. prima.
Tabula quin-
ta.
Vide N.

SI data sint duæ magnitudines æquales (BC & DE), quoties tertia quævis (A) in alterutrâ continetur, toties continetur in alterâ.

Primo sit ex datis alterutra BC multiplex ipsius A , & non sæpius continetur A in alterutrâ quam in alterâ.

Nam, si fieri potest, contineatur A sæpius in DE quam in BC , & quoties A in BC continetur toties auferatur ex DE & relinquetur pars quædam mE ; sunt igitur BC & Dm ejusdem A æque multiplices, & ergo BC ipsi Dm æqualis est (1), sed est BC ipsi DE æqualis (2), & igitur Dm ipsi DE æqualis est (3), quod absurdum.

Jam, si fieri potest, contineatur A sæpius in BC quam in DE & auferatur A quoties fieri potest ex DE & relinquetur mE ipsâ A minor, & toties auferatur ex BC , & quoniam sæpius continetur in BC quam in DE , relinquetur pars nC ipsâ A major vel ipsi æqualis, & proinde ipsâ mE major; sunt vero Bn & Dm ejusdem A æque multiplices (4), & proinde æquales (5), & sunt quoque BC & DE æquales (6), & ergo nC ipsi mE æqualis est (7) sed & ipsâ major, quod absurdum.

Jam sit neutra ex datis multiplex ipsius A , & non sæpius continetur A in alterutrâ quam in alterâ.

Nam, si fieri potest, sæpius contineatur A in BC quam in DE , & auferatur quoties fieri potest ex DE & relinquetur mE ipsâ A minor, & toties auferatur ex BC & relinquetur nC ipsâ A major & ergo ipsâ mE major, sunt vero Bn & Dm ejusdem A æque multiplices & ergo æquales (8), & sunt quoque BC & DE æquales (9), & proinde nC ipsi mE æqualis est (10), sed & ipsâ major, quod absurdum. In nullo itaque casu sæpius continetur A in alterutrâ ex datis BC vel DE quam in alterâ.

Cor. 1. Hinc patet si alterutra ex datis sit multiplex ipsius A erit altera æque multiplex.

Cor. 2. Si duæ sint magnitudines æquales, quoties prima in tertiâ quâvis continetur, toties secunda in eâdem tertiâ continetur.

Cor. 3. Si sint quatuor magnitudines, prima quidem secundæ æqualis, tertia vero quartæ, quoties prima in tertiâ continetur, toties continetur secunda in quarto.

P R O P.

PROP. II. THEOR.

SI datae sint duae magnitudines (BC & DE) tertie Fig. 2. vero (A) submultiplex utcumque sumpta semper toties contineatur in alterutra quoties in altera, erunt datae magnitudines aequales.

Non enim, sed, si fieri potest, sit alterutra BC major & sit excessus ejus nC, & sumatur submultiplex a ipsius A ipsa nC minor, & saepius continetur a in BC quam in Bn, & est Bn ipsi DE aequalis & igitur toties continetur a in Bn quoties in DE (1), & ergo saepius continetur (1) per prop. a in BC quam in DE, sed & toties (2), quod absurdum, 1. l. 5. non est igitur alterutra ex datis altera major & ergo sunt (2) per hypoth. aequales.

Cor. Et si sint quatuor magnitudines quarum prima secundae aequalis est, submultiplex vero primae utcumque sumpta semper toties contineatur in tertia quoties aequae submultiplex secundae continetur in quarta, erit tertia quartae aequalis.

PROP. III. THEOR.

SI sint quatuor magnitudines (A, B, CD & EF) Fig. 3. quarum prima secundae major est, tertia vero quarta aequalis, non saepius continetur prima in tertia quam secunda in quarta.

Primo, sit B submultiplex ipsius EF & saepius si fieri potest, contineatur A in CD quam B in EF, & quoties B continetur in EF toties auferatur A ex CD & relinquetur (1) per const. pars quaedam mD, & quoniam Cm & EF ipsarum A & (2) per hypoth. B aequae multiplices sunt (1), A vero ipsa B major est (2), potb. erit Cm ipsa EF major (3), sed est EF ipsi CD aequalis (3) per ax. (4), & igitur Cm ipsa CD major est, quod absurdum. (4) per hypoth. potb.

Jam non sit B submultiplex ipsius EF, & saepius, si fieri potest, contineatur A in CD quam B in EF, & auferatur B ex EF quoties fieri potest & relinquetur nF ipsa B minor, & toties auferatur A ex CD & quoniam saepius continetur A in CD quam B in EF, erit residua mD vel ipsa A major vel ipsi aequalis, & igitur ipsa B major & proinde

proinde ipsa nF major, sunt vero Cm & En ipsarum A
 (5) *per const.* & B æque multiplices (5) & A ipsa B major est, ergo
 (6) *per ax.* Cm ipsa En major est (6), sed & mD ipsa nF major,
 3. l. 5.
 (7) *per by-* tota igitur CD tota EF major est, sed & ipsi æqualis (7)
posb. quod absurdum. In nullo itaque casu continetur A sæ-
 pius in CD quam B in EH.

Cor. Similiter si datae sint quatuor magnitudines qua-
 rum prima æqualis est secundæ, tertia vero minor quartâ,
 non sæpius continetur prima in tertiâ quam secunda in
 quartâ.

PROP. IV. THEOR.

Fig. 4. **S**I datae sint duæ magnitudines (AB & CD) qua-
 rum alterutra (AB) alterâ (CD) major est,
 datur submultiplex tertiæ cujuscvis (E) quæ sæpius in
 majore quam in minore continetur.

Sit mB excessus ipsius AB supra CD & sumatur e sub-
 multiplex ipsius E, ipsa mB minor, & quoniam Am
 ipsi CD æqualis est, quoties e in CD continetur toties
 (1) *per prop.* quoque in Am continetur (1), sed est e ipsa mB minor
 1. l. 5.
 (2) *per const.* (2) & proinde e sæpius continetur in AB quam in Am,
 & igitur sæpius quam in CD.

PROP. V. THEOR.

Fig. 4 & 5. **S**I datae sint duæ magnitudines (AB & CD) tertia
 vero quavis (e) sumi potest quæ sæpius in unâ
 (AB) quam in alterâ (CD) continetur, erit hac
 (CD) illâ (AB) minor.

Fig. 4. Si fit e submultiplex ipsius CD, auferatur ex AB toties
 quoties in CD continetur & relinquetur pars quædam mB
 (1) *per by-* (1), & erit Am ipsi CD æqualis quoniam utraque ejusdem
posb. e æque multiplex est, & ergo AB ipsa CD major est.

Fig. 5. Si vero e non fit submultiplex ipsius CD auferatur quo-
 ties fieri potest & relinquetur nD ipsa e minor, & toties
 auferatur ex AB, & quoniam sæpius continetur in AB
 (2) *per by-* quam in CD (2), erit pars residua mB ipsa e major vel
posb. ipsi æqualis & igitur ipsa nD major, sunt vero Am &
 Cn

Cn ejusdem e æque multiplices (3), & ergo æquales (4), (3) *per const.*
sed est mB ipsa nD major, tota igitur AB tota CD major (4) *per ax.*
est. 1. l. 5.

PROP. VI. THEOR.

SI datae sint duae magnitudines (a & AB) quarum Fig. 6.
prior posterioris submultiplex est, & sumatur tertia
quavis (x) quae prioris (a) sit submultiplex, erit
quoque posterioris (AB) submultiplex.

Dividatur enim AB in partes Ao & oB ipsi a æquales,
& quoniam x ipsius a submultiplex est (1), erit quoque (1) *per by-*
ipsum Ao submultiplex (2), & similiter ipsius oB submul-
tiplex, dividantur igitur Ao & oB in partes Am, m o, (2) *per. cor.*
on, nB ipsi x æquales, & erit tota AB divisa in partes 1. P. 1. l. 5.
ipsi x æquales & igitur x ipsius AB submultiplex
est.

PROP. VII. THEOR.

SI sint duae magnitudines (a & b) duarum (AC Fig. 7.
& BD) æque submultiplices, & sumantur aliae
duae (x & z) quae priorum æque submultiplices sunt,
erunt quoque posteriorum æque submultiplices.

Dividatur enim AC in partes Ao, oC ipsi a æquales,
& BD in partes Bn, nD ipsi b æquales, & quoniam
æquales sunt a & Ao (1), x vero ipsius a submultiplex (1) *per const.*
est (2), erit ipsius Ao æque submultiplex (3), & simili- (2) *per by-*
ter est z æque submultiplex ipsarum b & Bn, x vero & (3) *per cor.*
 z ipsarum a & b æque submultiplices sunt (4) & proinde 1. P. 1. l. 5.
ipsarum Ao & Bn æque submultiplices, & sic quoque (4) *per by-*
æque submultiplices ipsarum oC & nD, qualis igitur *potb.*
submultiplex est x ipsius AC talis erit z ipsius BD.

Cor. 1. Si z submultiplex sit ipsius b , quoties vero Fig. 8.
 z in b continetur toties x in a continetur, & sumantur *Vide N.*
ipsarum b & a æque multiplices quævis BD & AC,
non sæpius continetur z in BD quam x in AC.

Nam si x submultiplex sit ipsius a , erunt z & x æque (1) *per prop.*
submultiplices ipsarum BD & AC (1), & igitur toties 7. l. 5.
continetur x in AC quoties z in BD.

Si

Si vero x non fit submultiplex ipsius an auferatur ex an quoties fieri potest & relinquetur pars quædam on , & quoniam x & z ipsarum ao & b æque submultiplices sunt (2), quoties z in multiple quavis ipsius b continetur, toties x in æque multiple ipsius ao continetur, est vero an ipsâ ao major, & igitur multiplex quavis ipsius an æque multiple ipsius ao major est (3), non igitur sæpius continetur x in multiple quavis ipsius ao quam in æque multiple ipsius an (4), & ergo non sæpius continetur z in multiple quavis ipsius b quam x in æque multiple ipsius an .

(2) per hyp.
patet.

(3) per ax.
3. l. 5.

(4) per
cor. P. 3. l. 5.

Fig. 7. & 9.

Cor. 2. Si b submultiplex fit ipsius BD , quoties vero b in BD continetur toties a in AC continetur, & sumantur ipsarum b & a æque submultiplices z & x , non sæpius z in BD continetur quam x in AC .

(1) per prop.
7. l. 5.

Si enim a submultiplex fit ipsius AC patet x & z ipsarum AC & BD æque submultiplices esse (1).

Fig. 9.

Si vero non, auferatur quoties fieri potest & relinquetur oC , sunt igitur a & b ipsarum AO & BD æque submultiplices & proinde, quoniam x & z ipsarum a & b

(2) per hyp.
patet.

æque submultiplices sunt (2), quoties z in BD continetur toties x in AO continetur (3), & ergo non sæpius z

(3) per prop.
7. l. 5.

in BD quam x in AC .

Fig. 10.

Cor. 3. Si z submultiplex fit ipsius BD , quoties vero z in BD continetur, toties quoque x in eadem BD continetur, erit x vel ipsi z æqualis, vel ipsâ minor.

(1) per ax.
1. l. 5.

Si x submultiplex fit ipsius BD , patet x & z æquales esse quoniam ejusdem BD æque submultiplices sunt (1).

Si vero non, auferatur x ex BD toties quoties z in ipsâ BD continetur & relinquetur pars quædam mD , sunt igitur x & z ipsarum Bm & BD æque submultiplices, & est Bm ipsâ BD minor & igitur x ipsâ z minor est (2).

(2) per ax.
4. l. 5.

PROP.

PROP. VIII. THEOR.

SI sint duæ magnitudines inæquales (A & B) da^r Fig. 11 &
tur quædam submultiplex minoris (B) quæ sæpius¹².
in tertiâ quâvis (CD) continetur quam æque submul-
tiplex majoris (A) in eâdem (CD) continetur.

Sumatur enim submultiplex quævis a ipsius A & Fig. 11.
æque submultiplex b ipsius B , & sit primò a submultiplex
ipsius CD , & quoties a in CD continetur toties aufera-
tur b ex eâdem CD , & quoniam b ipsâ a minor est (1),
relinquetur pars quædam mD , & si mD ipsâ b major sit
sæpius continetur b in CD quam in Cm , & ergo sæpius
quam a continetur in CD .
(1) per hy-
poth. & ax.
3. l. 5.

Si vero mD ipsâ b minor sit, sumatur z submultiplex
ipsius b ipsâ mD minor, & æque submultiplex x ipsius
 a , & quoniam x & z æque submultiplices sunt ipsarum
 a & b (2), a vero & b æque submultiplices ipsarum
 CD & Cm , erunt x & z æque submultiplices ipsarum
 CD & Cm (3), sed est z ipsâ mD minor (4), & ergo
sæpius continetur z in CD quam in Cm , & ergo sæpius
quam x in eâdem CD continetur.
(2) per const.
(3) per prop.
7. l. 5.
(4) per const.

Jam non sit a submultiplex ipsius CD , & auferatur Fig. 12.
quoties fieri potest ex CD & relinquetur pars quædam
 nD , & toties auferatur b ex CD & relinquetur mD , &
quoniam Cm & Cn ipsarum b & a æque multiplices sunt,
 b vero ipsâ a minor est (5), erit Cm ipsâ Cn minor
(6); sumatur submultiplex z ipsius b ipsâ mn minor,
& æque submultiplex x ipsius a , & erunt z & x ipsa-
rum Cm & Cn æque submultiplices (7), z vero ipsâ
 mn minor est (8), & igitur z sæpius continetur in Cn
quam in Cm , & igitur sæpius quam x in Cn , sed est x
ipsâ z major (9), & igitur non sæpius continetur x in
 nD quam z in eâdem nD (10), sæpius vero continetur
 z in Cn quam x in Cn , & ergo sæpius z in CD quam
 x in CD .
(5) per hy-
poth. & ax.
3. l. 5.
(6) per ax.
3. l. 5.
(7) per prop.
7. l. 5.
(8) per const.
(9) per const.
& ax. 3. l. 5.
(10) per
prop. 3. l. 5.

Cor. Similiter si sint quatuor magnitudines quarum
prima A secundâ C major est, tertia vero B quartâ D
æqualis, sumi potest submultiplex ipsius C quæ sæpius
in D continetur quam æque submultiplex ipsius A in B
continetur.

PROP. IX. THEOR.

Fig. 13.

SI sint duæ magnitudines (B & A) datur vero submultiplex (b) unius quæ sæpius in tertiâ quâvis (CD) continetur quam æque submultiplex (a) alterius in eadem tertiâ continetur, erit hæc (A) illâ (B) major.

Sit primo b submultiplex ipsius CD , & quoties b continetur in CD toties ponatur a & inde efficiatur EF , & quoniam toties continetur a in EF quoties b in CD , sæpius vero b in CD quam a in CD (1), sæpius continetur a in EF quam in CD & ergo EF ipsâ CD major est (2), sunt vero a & b ipsarum EF & CD æque submultiplices (3), & ergo a ipsâ b major est (4), & A & B ipsarum a & b æque multiplices sunt & igitur A ipsâ B major est (4).

3. l. 5.

Si vero b non sit submultiplex ipsius CD , auferatur quoties fieri potest & relinquatur mD , & sumatur EF ut supra & erit ipsâ CD & ergo ipsâ Cm major, sunt vero a & b ipsarum EF & Cm æque submultiplices & ergo a ipsâ b major, & A & B ipsarum a & b æque multiplices & ergo A ipsâ B major.

PROP. X. THEOR.

Fig. 14.

SI sint quatuor magnitudines (x , z , a & b) quarum prima sæpius continetur in tertiâ, quam secunda in quartâ, sæpius quoque continetur prima in multiplice quâvis (AC) tertiæ quam secunda in æque multiplice (BD) quarta.

Dividatur enim AC in partes Am & mC ipsi a æquales, & BD in partes Bn & nD ipsi b æquales, & quoniam x sæpius in a continetur quam z in b (1), toties vero x in Am quoties in a , & toties z in Bn quoties in b (2), sæpius continetur x in Am quam z in Bn ; auferatur, si fieri potest, z toties ex BD quoties x in Am continetur, & residua oD ipsâ nD minor erit, toties igitur continetur x in Am quoties z in Bo (3), sed sæpius x in

x in mC quam z in nD (4), & ergo sæpius quam z in (4) *per by-*
 oD (5), & proinde sæpius continetur x in AC quam z *potb. & P.*
 in BD . *1. l. 5.*

Si vero z non toties auferri potest ex ED quoties x *(5) per cor.*
 continetur in Am , patet x sæpius contineri in AC quam *P. 3. l. 5.*
 z in BD .

Cor. Hinc si x sæpius in a continetur quam z in b ,
 a vero sæpius in AC quam b in BD , sæpius quoque conti-
 netur x in AC quam z in BD .

PROP. XI. THEOR.

SI duæ magnitudines æquales (AC & BD) divi- *Fig. 15.*
 dantur in partes aliquotas multitudine inæquales
 (Am & mC ; Bn , no & oD) erit pars (Bn) ex iis
 quæ multitudine majores sunt, minor parte (Am) ex
 iis quæ multitudine minores sunt.

Quoties enim Bn continetur in BD , toties ponatur
 Am & inde efficiatur EF , & quoniam toties continetur *(1) per const.*
 Am in EF quoties Bn in BD (1), sæpius vero Bn in *(2) per by-*
 BD quam Am in AC (2), sæpius continetur Am in *potb.*
 EF quam in AC , & igitur EF ipsa AC major est (3), *(3) per prop.*
 & ergo ipsa BD major sed sunt Am & Bn ipsarum *5. l. 5.*
 EF & BD æque submultiplices (4), & igitur Bn ipsa *(4) per const.*
 Am minor est (5). *(5) per ax. 3. l. 5.*

PROP. XII. THEOR.

SI sint quotcunque magnitudines (a & b) quotcun- *Fig. 16.*
 que magnitudinum (AC & BD) æqualium nu-
 mero, singula singularum æque submultiplices, qualis
 submultiplex est una unius, talis erunt & omnes simul,
 omnium.

Quoniam enim a toties continetur in AC quoties b in (1) *per by-*
 BD (1), quot sunt partes in AC ipsi a æquales, tot *potb.*
 sunt in BD ipsi b æquales; dividatur AC in partes Am ,
 mC , ipsi a æquales, & BD in partes Bn , nD ipsi b
 æquales. Erit igitur multitudo partium Am , mC , mul-
 titudini partium Bn , nD æqualis, & quoniam Am ipsi
 a , Bn vero ipsi b æqualis est, erunt Am & Bn simul,
 N 2 ipfis

ipsis a & b simul æquales; similiter mC & nD simul ipsis a & b simul sunt æquales, quot igitur partes sunt in AC ipsi a æquales, tot sunt in AC & BD simul ipsis a & b simul æquales, & ergo qualis submultiplex est a ipsius AC , talis & a una cum b ipsarum AC & BD simul.

Fig. 16 &
17.

Cor. 1. Si sint quatuor magnitudines (a , b , AC & BD), quoties verò prima in tertiâ continetur, toties & secunda in quartâ continetur, toties quoque prima una cum secundâ, in tertiâ una cum quartâ continetur.

Fig. 16.

Si sint a & b submultiplices ipsarum AC & BD , pa-

(1) per prop.

præc.

Fig. 17.

Si vero neutra submultiplex sit, auferatur a quoties fieri potest ex AC & relinquetur mC ipsâ a minor, & toties auferatur b ex BD & relinquetur nD ipsâ b minor; sunt igitur a & b ipsarum Am & Bn æque submultiplices (2), & ergo quoties a in Am continetur, toties quoque continetur a una cum b in Am una cum Bn (3), sed est a ipsâ mC major, & b ipsâ nD major, & ergo a & b simul, ipsis mC & nD simul majores sunt, & ergo non sæpius continetur a una cum b in AC & BD simul quam in Am & Bn simul, & igitur toties continetur a una cum b in ipsis AC & BD simul quoties a continetur in AC .

(2) per by-
poth. &
const.

(3) per prop.
præc.

Similiter demonstrari potest si a submultiplex sit ipsius AC , b verò non submultiplex ipsius BD .

Cor. 2. Hoc quoque verum est de quocunque magnitudinibus.

PROP. XIII. THEOR.

Fig. 18.

SI sint quatuor magnitudines proportionales, prima ad secundam ut tertia ad quartam (A ad CD ut B ad EF), & sumatur submultiplex (a) primæ, si hæc sit submultiplex secundæ, erit æque submultiplex (b) tertiæ, submultiplex quartæ.

Non enim, sed si fieri potest sit a submultiplex ipsius CD , b vero non submultiplex ipsius EF , & quoties a in CD continetur, toties auferatur b ex EF & relinquatur oF , & sumatur x submultiplex ipsius b ipsâ oF minor, & æque submultiplex x ipsius a , & quoniam x & x ipsarum a & b æque submultiplices sunt, a vero & b ipsarum CD & Eo æque submultiplices, quoties

quoties x in CD continetur, toties z in Eo continetur (1) *per prop.*
 (1) est vero oF ipsâ z minor (2) & igitur z sæpius in EF continetur quam in Eo, & igitur z sæpius in EF (2) *per const.*
 quam x in CD. Sunt vero x & z ipsarum a & b æque submultiplices (3) *per const.*
 (3) & a & b ipsarum A & B æque submultiplices (4) *per by-potb.*
 (4) ergo x & z ipsarum A & B æque submultiplices (5) *per prop.*
 (5) & ergo quoties x in CD toties z in EF (6), *7. l. 5.*
 sed ostensum fuit sæpius z in EF contineri quam x in CD, quod absurdum. Non igitur residua est pars ulla ipsius EF post desumptam b quoties fieri potest ab ipsâ, *(6) per by-potb. & def. 5. l. 5.*
 & ergo b ipsius EF submultiplex est.

PROP. XIV. THEOR.

Magnitudines æquales (A & B) ad eandem (C) Fig. 19.
 eandem habent rationem. Et eadem magnitudo (C) ad æquales (A & B) eandem habet rationem.

Pars. I. Æqualium A & B sumantur æque submultiplices quævis a & b , & hæ quoque erunt æquales (1) *per ax. 1. l. 5.*
 (1), ergo quoties a in tertiâ quâvis C continetur, toties b in eâdem C continetur (2), est igitur A ad C ut B ad C (3). *(2) per cor. 2. p. 1. l. 5. (3) per def. 5. l. 5.*

Pars II. Sumatur submultiplex quævis c ipsius C, & quoniam A & B æquales sunt (4), quoties c in A continetur toties quoque in B continetur (5), est igitur C ad A ut C ad B (6). *(4) per by-potb. (5) per prop. 1. l. 5. (6) per def. 5. l. 5.*

Cor. Si sint quatuor magnitudines A, B, C & D quarum prima A secundæ B æqualis est, tertia vero C quartæ D æqualis, erit A ad C ut B ad D.

PROP. XV. THEOR.

Magnitudines (A & B) quæ ad eandem (C) Fig. 19.
 eandem habent rationem, sunt inter se æquales.
 Et magnitudines (A & B) ad quas eadem (C) eandem habet rationem sunt inter se æquales.

Pars. I. Sit enim, si fieri potest, alterutra A minor, & sumi potest submultiplex ejus quæ sæpius in C continetur quam æque submultiplex majoris B in eâdem

- (1) *per prop.* dem C continetur (1), contra hypothesim (2), non est
 8. l. 5. igitur alterutra alterâ minor & ergo sunt æquales.
 (2) *per def.* Pars. II. Sit enim, si fieri potest, alterutrâ B
 5. l. 5. major, & sumi potest ipsius C submultiplex quæ sæpius
 (3) *per prop.* in ipsâ B quam in minore A continetur (3), contra hy-
 4. l. 5. pothesim (4), non est igitur alterutra alterâ major, &
 (4) *per def.* ergo sunt æquales.
 5. l. 5.

PROP. XVI. THEOR.

Fig. 20.

Inæqualium magnitudinum ($A \text{ \& } B$) minor (A) ad eandem (C) minorem habet rationem. Eadem vero magnitudo (C) ad minorem (A) majorem habet rationem.

- Pars. I. Quoniam enim A ipsâ B minor est, sumi potest ipsius A submultiplex quæ sæpius in C continetur
 (1) *per prop.* quam æque submultiplex ipsius B in eadem C contine-
 8. l. 5. tur (1), & ergo A habet minorem rationem ad C quam
 (2) *per def.* B ad eandem C (2).
 7. l. 5. Pars. II. Quoniam A ipsâ B minor est, sumi
 (3) *per prop.* potest ipsius C submultiplex quæ sæpius in B quam in
 4. l. 5. A continetur (3), & ergo C habet majorem rationem ad
 (4) *per def.* A quam ad B (4).
 7. l. 5.

PROP. XVII. THEOR.

Fig. 20.

Ad eandem magnitudinem (C) rationem habentium ($A \text{ \& } B$), quæ majorem rationem habet (B) major est. Ad quam vero (A) eadem majorem rationem habet, minor est.

- Pars. I. Quoniam ratio ipsius B ad C major est ratione ipsius A ad eandem C , sumi potest ipsius A sub-
 (1) *per def.* multiplex quæ sæpius in C continetur quam æque sub-
 7. l. 5. multiplex ipsius B in eadem C continetur (1), & ergo
 (2) *per prop.* A ipsâ B minor est (2).
 9. l. 5. Pars. II. Quoniam C ad A majorem habet ratio-
 (3) *per def.* nem quam ad B sumi potest submultiplex ipsius C quæ
 7. l. 5. sæpius in B quam in A continetur (3) & ergo B ipsâ A
 (4) *per prop.* major est (4).
 5. l. 5.

PROP.

PROP. XVIII. THEOR.

QUÆ eidem eadem sunt rationes, inter se sunt Fig. 21.
eadem.

Si sit A ad B ut C ad D, & C ad D ut E ad F,
erit quoque A ad B ut E ad F.

Quoniam est A ad B ut C ad D, quoties quævis submul-
tiplex ipsius A in B continetur, toties æque submultiplex
ipsius C in D continetur (1), & quoniam C est ad D ut E ad F, quoties quævis submultiplex ipsius C in D conti-
netur, toties æque submultiplex ipsius E in F continetur (1). Ergo quoties quævis submultiplex ipsius A in B
continetur toties æque submultiplex ipsius E in F contine-
tur, & ergo est A ad B ut E ad F (2).

(1) per def.
5. l. 5.

(2) per def.
5. l. 5.

PROP. XIX. THEOR.

SI prima ad secundam eandem habeat rationem ac
tertia ad quartam (A ad B ut C ad D), tertia
vero ad quartam maiorem habeat rationem quam quinta
ad sextam (C ad D quam E ad F), prima quoque habet
ad secundam maiorem rationem quam quinta ad sextam,
(A ad B quam E ad F).

Fig. 21.

Quoniam C habet ad D maiorem rationem quam E ad F,
sumi potest submultiplex ipsius E quæ sæpius in F contine-
tur quam æque submultiplex ipsius C in D continetur (1), &
ergo, quoniam A est ad B ut C ad D, sæpius quam æque
submultiplex ipsius A in B continetur (2), & igitur A est ad
B in maiore ratione quam E ad F (3).

(1) per def.
7. l. 5.

(2) per def.
5. l. 5.

(3) per def.
7. l. 5.

Cor. Similiter si sit A ad B ut C ad D, E vero ad F
in maiore ratione quam C ad D, erit quoque E ad F in
maiore ratione quam A ad B.

PROP.

PROP. XX. THEOR.

Fig. 22.

S*I sint quatuor magnitudines proportionales (A ad B ut CD ad E) erunt & inversè proportionales (B ad A ut E ad CD).*

Si enim sumantur æque submultiplices quævis b & e ipsarum B & E, quoties b in A continetur toties quoque e in CD continetur.

Non enim, sed si fieri potest contineatur alterutra b sæpius in A quam continetur e in CD, & quoties b continetur in A toties ponatur e & efficiatur CY, & erit CY ipsâ CD major (1), & est e submultiplex ipsius CY, fit x æque submultiplex ipsius CD & etiam z ipsius A.

Quoniam igitur CD ipsâ CY minor est, x vero & e ipsarum æque submultiplices sunt, erit x ipsâ e minor (2); datur igitur submultiplex quædam ipsius x quæ sæpius in E continetur quam æque submultiplex ipsius e in eadem E

continetur (3), hoc est quam æque submultiplex ipsius b in B continetur (4); sed quoniam z toties posita quoties

b continetur in A efficit ipsam A (5), est z vel ipsâ b maior vel ipsi æqualis (6), ergo nulla submultiplex ipsius z

sæpius in B continetur quam æque submultiplex ipsius b in eadem B continetur (7), datur vero submultiplex ipsius x

quæ sæpius in E continetur quam æque submultiplex ipsius b in B continetur, & ergo sæpius quam æque submul-

tiplex ipsius z in B continetur; sunt vero x & z ipsarum CD & A æque submultiplices (8), & ergo æque submul-

tiplices ipsarum x & z sunt quoque æque submultiplices ipsarum CD & A (9), non igitur datur submultiplex

ipsius x quæ sæpius in E continetur quam æque submultiplex ipsius z in B continetur (10), sed & datur, quod

absurdum. Ergo non datur submultiplex ipsius B quæ sæpius in A continetur quam æque submultiplex ipsius E

in CD continetur, & similiter demonstrari potest non dari submultiplicem ipsius E quæ sæpius in CD continetur

quam æque submultiplex ipsius B in A. Est igitur B ad

A ut E ad CD (11).

5. l. 5.

PROP.

PROP. XXI. THEOR.

SI sint quatuor magnitudines proportionales (*A ad B ut C ad D*), erit prima ad primam una cum secundâ, ut tertia ad tertiam una cum quartâ (*A ad A una cum B ut C ad C una cum D*). Fig. 23.

Sumantur enim *a* & *c* ipsarum *A* & *C* æque submultiplices, & quoties *a* in *B* continetur toties quoque *c* in *D* continetur (1); quoniam igitur *a* & *c* ipsarum *A* & *C* (1) *per by-submultiplices* sunt, & quoties *a* in *A* continetur toties *c* in *C* continetur, quoties vero *a* in *B* continetur toties *c* in *D*, *a* in ipsis *A* & *B* simul toties continetur quoties *c* in ipsis *C* & *D* simul, & igitur est *A ad A una cum B ut C ad C una cum D* (2). (2) *per def.*

Cor. Si sit *A ad B ut C ad D*, erit *A una cum B ad B*, ut *C una cum D ad D*. 5. l. 5.

Quoniam enim *A* est *ad B ut C ad D*, erit *B ad A ut D ad C* (1), & ergo *B ad A una cum B*, ut *D ad C una cum D* (2), & ergo *A una cum B ad A*, ut *C una cum D ad D* (3). (1) *per prop.*
20. l. 5.
(2) *per prop.*
prac.
(3) *per prop.*
20. l. 5.

PROP. XXII. THEOR.

SI sint quocunque magnitudines proportionales (*A ad B ut C ad D*) erit ut una antecedens ad unam consequentem (*A ad B*) ita omnes antecedentes simul ad omnes consequentes simul (*A una cum C ad B una cum D*). Fig. 23.

Nam si sumantur ipsarum *A* & *C* æque submultiplices quævis *a* & *c*, erit *a una cum c eadem submultiplex ipsarum A & C simul* (1), quoties vero *a* in *B* continetur toties *c* in *D* continetur (2), & ergo toties *a una cum c* in *B una cum D* continetur (3), & ergo est *A ad B ut A una cum C ad B una cum D* (4). (1) *per prop.*
12. l. 5.
(2) *per hy-*
pos. & *def.*
5. l. 5.
(3) *per cor.*
1. p. 12.
l. 5.
(4) *per def.*
5. l. 5.

O

PROP.

P.

PROP. XXIII. THEOR.

Fig. 23.

SI sint quatuor magnitudines proportionales (A ad B ut C ad D) prima vero major sit quam tertia, erit secunda major quam quarta; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Pars. I. Sit A major quam C & erit B major quam D .

Non enim, sed, si fieri potest, sit D ipsi B æqualis, & quoniam A major est quam C , B vero ipsi D æqualis, sumi potest ipsius C submultiplex quæ sæpius in D continetur quam æque submultiplex ipsius A in B continetur

(1) per cor.

(1), contra hypothefin (2).

p. 8. l. 5.

(2) per def.

Similiter demonstrari potest D ipsâ B non esse majorem.

5. l. 5.

Est igitur B ipsâ D major.

Pars. II. Si A ipsi C æqualis sit, erit B ipsi D æqualis.

(1) per by-
poth.

Quoniam enim est A ad B ut C ad D (3), quoties submultiplex quævis ipsius A in B continetur, toties æque submultiplex ipsius C in D continetur (4), & igitur quoniam A ipsi C æqualis est erit B ipsi D æqualis (5).

(4) per def.

5. l. 5.

(5) per cor.

P. 2. l. 5.

Pars. III. Si A ipsâ C minor sit, erit B ipsâ D minor.

Demonstrari enim potest ut in parte primâ, B nec ipsi D æqualem esse, nec ipsâ majorem, est igitur B ipsâ D minor.

Cor. Et si secunda major sit quam quarta, erit prima major quam tertia; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

PROP. XXIV. THEOR.

Fig. 23.

SI sint quatuor magnitudines proportionales, (A ad B ut C ad D), prima vero secundâ major sit, erit tertia major quam quarta; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Pars. I. Sit A major quam B , & erit C major quam D .

Nam

Nam quoniam A ipsa B major est, datur submultiplex ipsius A quæ sæpius in ipsa quam in B continetur (1), (1) *per prop.* & igitur æque submultiplex ipsius C sæpius in ipsa quam in D continetur (2), & ergo C ipsa D major est (3). (2) *per by-poth. & def.* 4. l. 5. 5. l. 5.

Pars. II. Sit A ipsi B æqualis, & erit C ipsi D quoque æqualis. (3) *per prop.* 5. l. 5.

Nam quoniam A ipsi B æqualis est, quoties submultiplex ipsius A in ipsa A continetur, toties quoque in B continetur (4), sed quoties submultiplex ipsius A in B continetur toties æque submultiplex ipsius C in D continetur (5), & ergo quoties submultiplex ipsius C in C continetur, toties quoque in D continetur, & ergo C ipsi D æqualis est (6). (4) *per prop.* 1. l. 5. (5) *per by-poth. & def.* 5. l. 5. (6) *per prop.* 2. l. 5.

Pars. III. Sit A minor quam B, & erit C minor quam D.

Nam quoniam A minor est quam B datur submultiplex ipsius A quæ sæpius in B quam in ipsa A continetur (7), & igitur æque submultiplex ipsius C sæpius in D quam in ipsa C continetur (8), & ergo D ipsa C major est (9). (7) *per prop.* 4. l. 5. (8) *per by-poth. & def.* 5. l. 5. (9) *per prop.* 5. l. 5.

Cor. Et si tertia major sit quam quarta, erit prima major quam secunda; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

PROP. XXV. THEOR.

Si sint quatuor magnitudines proportionales (*A ad B Fig. 24. ut C ad D*), prima vero minor sit quam secunda, erit prima ad excessum secundæ supra ipsam, ut tertia ad excessum quartæ supra ipsam.

Sumantur enim *a* & *c* ipsarum A & C æque submultiplices, & quoties *a* in B continetur toties quoque *c* in D continetur (1); quoniam igitur *a* & *c* ipsarum A & C æque submultiplices sunt, & quoties *a* in B continetur toties quoque *c* in D continetur, *a* toties in excessu ipsius B supra A continetur quoties *c* in excessu ipsius D supra C continetur, & igitur est A ad excessum ipsius B supra A, ut C ad excessum ipsius D supra C (2). (1) *per by-poth. & def.* 5. l. 5. (2) *per def.* 5. l. 5.

Cor. 1. Similiter si sint quatuor magnitudines proportionales, prima vero major sit quam secunda, erit prima ad excessum ipsius supra secundam, ut tertia ad excessum ipsius supra quartam.

O 2

Cor.

Fig. 24.

Cor. 2. Si sint quatuor magnitudines proportionales, A ad B ut C ad D, erit differentia inter primam & secundam ad secundam, ut differentia inter tertiam & quartam ad quartam.

Nam quoniam est A ad B ut C ad D, erit B ad A ut D ad C (1), & ergo B ad differentiam inter ipsam & A ut D ad differentiam inter ipsam & C (2), & ergo differentia inter A & B ad B, ut differentia inter C & D ad D (3).
 (1) per prop. 20. l. 5.
 (2) per cor. 5. prop.
 (3) per prop. 20. l. 5.

PROP. XXVI. THEOR.

Fig. 24.

SI sint quatuor magnitudines proportionales (A ad B ut C ad D), erit submultiplex quævis (a) primæ ad secundam, ut æque submultiplex (c) tertiæ ad quartam.

Sumantur enim ipsarum a & c æque submultiplices quævis x & z, & quoniam x & z ipsarum a & c æque submultiplices sunt, a vero & c ipsarum A & C æque submultiplices sunt (1), erunt x & z ipsarum A & C æque submultiplices (2), & ergo quoties x in B continetur toties z in D continetur (3), & ergo est a ad B ut c ad D (4).
 (1) per hypoth.
 (2) per prop. 7. l. 5.
 (3) per hypoth. & def. 5. l. 5.
 (4) per def. 5. l. 5.

PROP. XXVII. THEOR.

Fig. 25.

SI sint quatuor magnitudines proportionales (A ad B ut C ad D), erit prima ad quamvis submultiplicem (b) secundæ, ut tertia ad æque submultiplicem (d) quartæ.

Non enim, sed si fieri potest habeat A ad b maiorem, rationem quam C ad d & quoniam C habet ad d minorem rationem quam A ad b, sumi potest submultiplex z ipsius C quæ sæpius in d continetur quam æque submultiplex x ipsius A in b continetur (1), quoniam igitur z sæpius continetur in d quam x in b, D vero & B ipsarum d & B

(1) per def. 7. l. 5.

d & b æque multiplices sunt, sæpius continetur z in D quam x in B (2), sed est A ad B ut C ad D , & ergo toties continetur x in B quoties z in D (3), quod absurdum. Non igitur habet A ad b maiorem rationem quam C ad d , & similiter non habet C ad d rationem maiorem quam A ad b . (2) per prop. 10. l. 5.
(3) per def. 5. l. 5.

Cor. 1. Si sint duæ magnitudines A & B , sumantur vero ipsarum æque submultiplices a & b , erit A ad a ut B ad b .

Cor. 2. Si sint quatuor magnitudines proportionales, Fig. 26. A ad B ut C ad D , sumantur vero antecedentium quævis æque submultiplices a & c , & quoque consequentium aliæ utcumque æque submultiplices b & d , erit, a ad b ut c ad d .

Nam quoniam est A ad B ut C ad D , a vero & c ipsarum A & C æque submultiplices sunt (1), erit a ad B ut c ad D (2), & ergo, quoniam b & d ipsarum B & D æque submultiplices sunt, erit a ad b ut c ad d (3). (1) per hyp.
(2) per prop. 26. l. 5.
(3) per prop. 27. l. 5.

PROP. XXVIII. THEOR.

Partes (a & b) inter se comparatæ, eandem habent rationem quam habent earum æque multiplices (AC & BD). Fig. 27.

Quoniam enim AC & BD ipsarum a & b æque multiplices sunt, quot partes sunt in AC ipsi a æquales, tot sunt in BD ipsi b æquales; dividatur AC in partes Am , mn , nC ipsi a æquales & BD in partes Bo , os , sD ipsi b æquales.

Est igitur Am ad Bo ut mn ad os (1), & mn ad os ut nC ad sD (1), ut igitur una antecedens Am ad unam consequentem Bo , ita omnes antecedentes simul, seu AC , ad omnes consequentes simul, seu BD (2), sed ut Am ad Bo ita a ad b (1), ergo ut a ad b ita AC ad BD (3). (1) per cor. prop. 14. l. 5.
(2) per prop. 22. l. 5.
(3) per prop. 18. l. 5.

Cor. 1. Si sint quatuor magnitudines proportionales, a ad b ut c ad d , sumantur vero ipsarum a & b æque multiplices A , B & quoque ipsarum c & d aliæ æque multiplices C & D , erit A ad B ut C ad D , ut patet ex prop. præc. & prop. 18. Fig. 26.

Cor. 2. Similiter si sit A ad B ut C ad D , sumantur vero ipsarum A & B æque submultiplices a & b & ipsarum C &

C & D alia utcumque æque submultiplices c & d erit a ad b ut c ad d .

PROP. XXIX. THEOR.

Fig. 26.

Si sint quatuor magnitudines proportionales (a ad b ut c ad d) erit multiplex quævis (A) primæ ad secundam, ut æque multiplex (C) tertiæ ad quartam.

Qualis enim multiplex est A ipsius a talis sit B ipsius b & quoque D ipsius d , & erit A ad B ut C ad D , (1), & ergo A ad b ut C ad d (2).

(1) per cor.
1. P. 28.
l. 5.
(2) per prop.
27. l. 5.

PROP. XXX. THEOR.

Fig. 26.

Si sint quatuor magnitudines proportionales (a ad b ut c ad d) erit prima ad multiplicem quamvis (B) secundæ, ut tertia ad æque multiplicem (D) quarta.

Qualis enim multiplex est B ipsius b talis sit A ipsius a & quoque C ipsius c , & erit A ad B ut C ad D (1), & ergo a ad B ut c ad D (2).

(2) per prop.
26. l. 5.

PROP. XXXI. THEOR.

Fig. 26.

Si sint quatuor magnitudines proportionales (a ad b ut c ad d) sumantur vero antecedentium æque multiplices (A & C) & consequentium alia utcumque æque multiplices (B & D) erunt hæ quoque proportionales.

Quoniam enim a est ad b ut c ad d , A vero & C ipsarum a & c æque multiplices sunt (1) erit A ad b ut C ad d (2), & ergo quoniam B & D ipsarum b & d æque multiplices sunt (1) erit A ad B ut C ad D (3).

(1) per by-
posb.
(2) per prop.
29. l. 5.
(3) per prop.
30. l. 5.

PROP.

PROP. XXXII. THEOR.

Si sint quatuor magnitudines proportionales (a ad b ut Fig. 26. c ad d) prima & tertia æque multiplices (A & C) Vide N. secunda & quarta æque multiplices (B & D) juxta quamvis multiplicationem vel unà superant, vel unà æquales sunt, vel unà deficiunt.

Quoniam enim A & C antecedentium æque multiplices sunt (1), B vero & D consequentium æque multiplices (1), ^{(1) per by-poth.} erit A ad B ut C ad D (2), & ergo si A major sit quam B erit C major quam D ; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor (3). ^{(2) per prop. 31. l. 5.} ^{(3) per prop. 24. l. 5.}

PROP. XXXIII. THEOR.

Si sint quatuor magnitudines ejusdem generis propor- Fig. 28. tionales (A ad B ut C ad DO) erunt & alternè proportionales (A ad C ut B ad DO).

Si enim sumantur æque submultiplices quævis a & b ipsarum A & B , quoties a in C continetur toties b in DO continetur.

Non enim, sed, si fieri potest, sæpius contineatur a in C quam b in DO , & quoties a in C continetur toties ponatur b & inde efficiatur DY , erit DY ipsa DO major (1); ^{(1) per prop. 5. l. 5.} est igitur b submultiplex ipsius DY , sit x æque submultiplex ipsius DO ut et z ipsius C .

Quoniam igitur x & b ipsarum DO & DY æque submultiplices sunt (2), DO vero ipsa DY minor est, erit x ipsa ^{(2) per const.} b minor (3); & quoniam z & x æque submultiplices sunt ^{(3) per ax.} ipsarum C & DO (4), erit z ad x ut C ad DO (5); sed ^{3. l. 5.} C ad DO ut A ad B (6), & ergo z ad x ut A ad B ^{(4) per const.} (7), sunt vero a & b ipsarum A & B æque submultiplices ^{(5) per prop. 28. l. 5.} & ergo est a ad b ut A ad B (5) & ergo est z ad x ut a ad ^{(6) per by-poth.} b (7), est vero x ipsa b minor & ergo z ipsa a minor est (8), ^{(7) per prop. 18. l. 5.} datur igitur submultiplex ipsius z quæ sæpius in C continetur quam æque submultiplex ipsius a in eadem C continetur ^{(8) per cor. P. 23. l. 5.} (9); sed sunt z & x æque submultiplices ipsarum C & ^{(9) per prop. 8. l. 5.}

- (10) *per* C & DO (10), & igitur quoties submultiplex quævis ip-
const. sius z in C continetur, toties æque submultiplex ipsius x
 in DO continetur (11); datur igitur submultiplex ipsius
 (11) *per* x quæ sæpius in DO continetur quam æque submultiplex
prop. 7. l. 5. ipsius a in C continetur, sed x toties posita quoties a con-
 tinetur in C efficit ipsam DO (12), non igitur datur sub-
 (12) *per* multiplex ipsius x quæ sæpius in DO continetur quam
const. æque submultiplex ipsius a in C continetur (13), sed &
 (13) *per cor.* datur, quod absurdum.
2. p. 7. l. 5. Non igitur continetur submultiplex quævis ipsius A in C
 sæpius quam æque submultiplex ipsius B continetur in
 DO, & similiter demonstrari potest non sæpius contineri
 submultiplicem quamvis ipsius B in DO quam æque sub-
 multiplex ipsius A continetur in B. Est igitur A ad C
 (14) *per def.* ut B ad DO (14.)
5. l. 5.

P R O P. XXXIV. T H E O R.

Fig. 29.

Si sint quocunque magnitudines, & alie ipsis nu-
 mero aequales, quæ si binæ sumantur sunt in eâdem
 ratione, & sit ordinata earum proportio, & ex
 æquali in eâdem ratione erunt.

Sint primo tres magnitudines A, B & CO, & alie tres
 D, E & F; si sit A ad B ut D ad E, & B ad CO ut E
 ad F, erit A ad CO ut D ad F.

Si enim sumantur æque submultiplices quævis a & d
 ipsarum A & D, quoties a in CO continetur, toties d in
 F continetur.

Non enim, sed, si fieri potest, continueatur d sæpius in F
 quam a in CO, & quoties d in F continetur toties ponatur
 (1) *per prop.* a & inde efficiatur CY, erit CY ipsâ CO maior (1);
 (1) *per prop.* est igitur a submultiplex ipsius CY, sit x æque submulti-
 (1) *per prop.* plex ipsius CO, ut et z ipsius F.

Quoniam igitur x & a ipsarum CO & CY æque submul-
 tiplices sunt (2), CO vero ipsâ CY minor est, erit x ipsâ
 (2) *per const.* a minor (3), & quoniam B est ad CO ut E ad F (4),
 (3) *per ax.* erit CO ad B ut F ad E x vero & z sunt æque submulti-
 (3) *per ax.* plices ipsarum CO & F (5), & proinde est x ad B ut z ad E
 (4) *per by-* (6), & igitur quoties submultiplex quævis ipsius x in B con-
 (4) *per by-* tinetur, toties æque submultiplex ipsius z in E continetur sed
 (5) *per const.* est x ipsâ a minor & ergo datur submultiplex ipsius x quæ
 (6) *per prop.* sæpius in B continetur quam æque submultiplex ipsius a in
 (6) *per prop.* eâdem

eâdem B continetur (7) & ergo sæpius quam æque sub-
 multiplex ipsius d in E continetur (8), datur igitur sub-
 multiplex ipsius z quæ sæpius in E continetur quam æque
 submultiplex ipsius d in E continetur & est igitur z minor
 quam d (9), sed z toties posita quoties d continetur in F
 efficit ipsam F (10), & ergo z vel ipsâ d major est vel ipsi
 æqualis (11), sed ostensum fuit z ipsâ d minorem esse,
 quod absurdum.

Non igitur sæpius continetur submultiplex quævis ipsius
 D in F quam æque submultiplex ipsius A continetur in
 CO; & similiter demonstrari potest non sæpius contineri
 submultiplicem quamvis ipsius A in CO quam continetur
 æque submultiplex ipsius D in F. Est igitur A ad C ut
 D ad F (12).

Sint jam quatuor magnitudines A, B, C, G, & aliæ
 quatuor D, E, F, H; & sit A ad B ut D ad E, B vero ad
 C ut E ad F & C ad G ut F ad H, erit quoque A ad G ut
 D ad H.

Quoniam enim tres sunt magnitudines A, B, C, &
 aliæ tres D, E, F, quæ si binæ sumantur sunt in eâdem
 ratione, erit A ad C ut D ad F (13), est autem C ad G ut
 F ad H (14), & ergo erit A ad G ut D ad H (13).

PROP. XXXV. THEOR.

SI sint tres magnitudines (A, B, C) & aliæ tres
 (D, E, F) quæ si binæ sumantur sunt proportio-
 nales, sed perturbatè (A ad B ut E ad F, & B ad
 C ut D ad E) & si in priore serie prima magnitudo
 major sit quam tertia, erit quoque in posteriori serie
 prima major quam tertia.

Nam quoniam D est ad E ut B ad C (1) erit, E ad D
 ut C ad B (2), sed A major est quam C (1) & ergo A ha-
 bet maiorem rationem ad B quam habet C ad eandem B
 (2), & ergo maiorem quam habet E ad D (4), sed est
 A ad B ut E ad F (5) & ergo E habet maiorem rationem
 ad F quam habet eadem E ad D (6), & ergo D ipsâ F
 major est (7).

P

PROP.

17. l. 5.

PROP. XXXVI. THEOR.

Fig. 32.

SI sint tres magnitudines (A, B, C) & aliae tres (D, E, F) quæ si binæ sumantur sunt proportionales, sed perturbatè (A ad B ut E ad F , & B ad C ut D ad E), & si sumantur primæ & secundæ in priori serie & primæ in posteriore (ipsarum sciz. A, B & D) æque submultiplices quævis (a, b , & d); tertiæ vero in priori serie & secundæ & tertiæ in posteriore (ipsarum sciz. C, E & F) aliae utcunque æque submultiplices (c, e & f); hæ æque submultiplices quoque quantitatum in priori serie & earum in posteriore erunt perturbatè proportionales (sciz. a ad b ut e ad f , & b ad c ut d ad e).

(1) per hypoth.

(2) per cor. 2. p. 28. l. 5.

(3) per hypoth.

(4) per cor. 2. p. 27. l. 5.

Quoniam enim est A ad B ut E ad F (1), ipsarum vero A & B sumuntur æque submultiplices a & b , & ipsarum E & F aliae æque submultiplices e & f , erit a ad b ut e ad f (2).

Et quoniam est B ad C ut D ad E (3), ipsarum vero B & D sumuntur æque submultiplices b & d , & quoque ipsarum C & E aliae æque submultiplices c & e (3), erit b ad c ut d ad e (4).

PROP. XXXVII. THEOR.

Fig. 32.

SI sint tres magnitudines (A, B, C) & aliae tres (D, E, F) quæ si binæ sumantur sunt proportionales, sed perturbatè (A ad B ut E ad F , & B ad C ut D ad E); & si primarum in utraq. serie (A & D) sumantur quæcunque æque submultiplices (a & d), & ultimarum in utraq. serie (C & F) aliae utcunque æque submultiplices (c & f), & primæ in priore serie pars (a) major sit parte ultimæ in eadem serie (c), erit etiam in posteriore serie primæ pars (d) major parte ultimæ (f).

Sumatur enim b quæ sit eadem submultiplex ipsius B ac est a ipsius A , & quoque e quæ sit eadem submultiplex ipsius E ac est f ipsius F , & erunt tres magnitudines a, b, c , & aliae tres d, e, f , si binæ sumantur proportionales,

portionales, sed perturbatè (1), & ergo si a major sit (1) *per prop.*
quam c , erit d major quam f (2). 36. l. 5.

(2) *per prop.*
35. l. 5.

PROP. XXXVIII. THEOR.

SI sint quocunque magnitudines, & aliae ipsis nu- *Fig. 33, &*
mero aequales, quae si binæ sumantur sunt in eâ- 34.
dem ratione, sed perturbatè, & ex aequali in eâdem
ratione erunt.

Sint primò tres magnitudines A , B & CO , & aliae
tres D , E , F ; si sit A ad B ut E ad F , & B ad CO
ut D ad E , erit A ad CO ut D ad F .

Si enim sumantur ipsarum A & D æque submultiplices
quævis a & d , quoties a in CO continetur, toties quoque
 d in F continetur.

Non enim, sed, si fieri potest, contineatur d sæpius
in F quam a in CO , & quoties d in F continetur toties
ponatur a & inde efficiatur CY ; erit CY ipsa CO ma- *(1) per prop.*
jor (1). 5. l. 5.

Est igitur a submultiplex ipsius CY , sit x æque sub-
multiplex ipsius CO , & quoque z ipsius F .

Quoniam igitur x & a sunt æque submultiplices ipsa- *(2) per ax.*
rum CO & CY , CO vero ipsa CY minor est, erit x ip- 1. l. 5.
sa a minor (2); Et quoniam z æque submultiplex est ip- *(3) per const.*
sius F ac est x ipsius CO (3), toties vero continetur *(4) per cor.*
 d in F quoties x in CO (3), toties continetur d in F *3. p. 7 l. 5.*
quoties z , submultiplex ipsius F , in eâdem F conti-
netur, est igitur d aut minor ipsa z aut ipsi æqualis (4). *(5) per prop.*
Sumuntur igitur ipsarum A & D æque submultiplices a *37. l. 5.*
& d , & ipsarum quoque CO & F aliae æque submulti-
plices x & z , & est a ipsa x major, d vero non major
ipsa z , quod fieri nequit (5).

Non igitur sæpius continetur submultiplex quævis ipsi-
us D in F , quam continetur æque submultiplex ipsius
 A in CO , & similiter demonstrari potest non sæpius con-
tineri submultiplicem quamvis ipsius A in CO quam
continetur æque submultiplex ipsius D in F . Est igitur
 A ad CO ut D ad F .

Sint jam quatuor magnitudines, A , B , C , G , & *Fig. 34.*
aliae quatuor, D , E , F , H ; & sit A ad B ut F ad H ,
 B vero ad C ut E ad F & C ad G ut D ad E , erit
quoque A ad G ut D ad H .

(6) *per partem præc.* Quoniam enim sunt tres magnitudines A, B, C & alia tres, E, F, H quæ si binæ sumantur sunt proportionales, sed perturbatè, erit A ad C ut E ad H (6)
 (7) *per hypoth.* sed est C ad G ut D ad E (7) & ergo erit A ad G ut
 (8) *per partem præc.* D ad H (8).

PROP. XXXIX. THEOR.

*Fig. prima.
Tab. septima.*

SI sint tres magnitudines proportionales (*A ad B ut B ad C*), & alia tres proportionales (*D ad E ut E ad F*), & sit in priori serie prima ad ultimam (*A ad C*), ut in posteriore serie prima ad ultimam (*D ad F*), erit quoque in priori serie prima ad secundam (*A ad B*), ut in posteriore prima ad secundam (*D ad E*).

Non enim, sed, si fieri potest, habeat alterutra A minorem rationem ad B quam habet D ad E, & quoniam B est ad C ut A ad B (1), & E ad F ut D ad E (1), habet quoque B minorem rationem ad C quam habet E ad F (2); sumi igitur potest submultiplex ipsius B quæ sæpius in C continetur quam æque submultiplex ipsius E in F continetur (3); sumantur & sint *b* & *e*, & ipsarum A & D sumantur æque submultiplices *a* & *d*, & quoniam ipsarum A & B sumuntur æque submultiplices *a* & *b*, erit *a* ad *b* ut A ad B (4), & similiter est *d* ad *e* ut D ad E (4), & ergo habet *a* minorem rationem ad *b* quam habet *d* ad *e* (5), & igitur sumi potest submultiplex ipsius *a* quæ sæpius in *b* continetur quam æque submultiplex ipsius *d* in *e* continetur (6), sumantur & sint *x* & *z*, & quoniam *x* sæpius in *b* continetur, quam *z* in *d* continetur, *b* vero sæpius in C continetur quam *d* in F, sæpius quoque continetur *x* in C quam *z* in F (7); sunt vero *x* & *z* ipsarum *a* & *d* æque submultiplices, & *a* & *d* ipsarum A & D æque submultiplices, & proinde *x* & *z* ipsarum A & D æque multiplices sunt (8), & ergo quoties *x* in C continetur toties quoque *z* in F continetur (9), sed ostensum fuit sæpius contineri *x* in C quam *z* in F, quod absurdum. Non habet igitur A minorem rationem ad B, quam habet D ad E, & similiter demonstrari potest D non habere minorem rationem ad E quam habet A ad B, & proinde est A ad B ut D ad E.

EUCLIDIS

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M .

L I B E R S E X T U S .

D E F I N I T I O N E S .

1. **S**imiles figuræ rectilineæ sunt, quæ & singulos angulos æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.
2. Extremâ ac mediâ ratione secari recta linea dicitur, quando ut tota ad majus segmentum ita fuerit majus segmentum ad minus.
3. Altitudo cujusque figuræ est recta linea a vertice ad basem perpendicularis ducta.
4. Parallelogrammum super rectâ descriptum, ad istam *Vide N.* rectam applicari dicitur.
5. Parallelogrammum super parte cujusvis rectæ descriptum, ad istam rectam applicari dicitur deficiens figurâ parallelogrammâ, scilicet isto parallelogrammo quod super reliquâ parte describitur.
6. Quando recta data producta est, parallelogrammum super totâ descriptum, applicari dicitur ad rectam datam excedens figurâ parallelogrammâ, scilicet isto parallelogrammo quod super parte productâ describitur.

P R O P O S I T I O

PROPOSITIO PRIMA. THEOREMA.

Fig. prima.
Tab. quinta.
Liber sextus.
Vide N. **T**riangula (ABC , DBE), & parallelogramma (BA & CF), quæ eandem habent altitudinem, sunt inter se ut bases.

Pars. I. Trianguli ABC basis dividatur in quotcunque partes æquales AF , FK , & KC , & a basi DE sumantur, quoties fieri potest, partes DI & IE ipsi AF æquales, & ducantur BF , BK & BI .

- (1) *per const.* Quoniam igitur rectæ AF , FK , KC , DI & IE æquales
 (2) *per prop.* sunt (1), triangula vero super ipsis constituta sunt in eadem
 38. l. 1. altitudine, erunt quoque ipsa triangula æqualia (2), qualis igitur submultiplex est AF ipsius AC talis est triangulum ABF trianguli ABC , & quoties AF in basi DE continetur toties triangulum ABF in triangulo DBE continetur, & similiter ostendi potest quoties alia quævis submultiplex ipsius AC in DE continetur, toties æque submultiplex ipsius ABC in DBE continetur, & proinde est ABC ad DBE ut basis AC ad basem DE (3).
 5. l. 5.

Fig. 2. *Pars. II.* Parallelogramma BA & CF in eadem altitudine, sunt inter se ut bases BC & CD .

- (4) *per par. præc.* Ducantur enim BA & AD , & quoniam triangula BAC , CAD sunt in eadem altitudine erunt inter se ut bases BC
 (5) *per prop.* & CD (4), parallelogramma vero ipsorum dupla sunt (5),
 34. l. 1. & ergo sunt parallelogramma inter se ut BC & CD (6).
 (6) *per prop.* *Cor. 1.* Triangula vel parallelogramma quæ æquales
 28. l. 5. habent altitudines, sunt inter se ut bases.

Positis enim basibus in directum, erit recta jungens vertices parallela rectæ in quâ sunt bases, demissis enim a verticibus perpendicularibus in bases, erunt hæ parallelæ,

- (1) *per by-poth.* & quoniam sunt quoque æquales (1), rectæ ipsas jungentes erunt parallelæ (2); & proinde similiter ac in propositione demonstrari potest triangula vel parallelogramma esse inter se ut bases.
 (2) *per prop.*
 33. l. 1.

Fig. 3. *Cor. 2.* Triangula ABC , DEF , & parallelogramma AB & DE , super basibus æqualibus AC & DF , sunt inter se ut altitudines.

Nam ductis BK & EG ipsis AC & DF parallelis, per C & F ducantur CK & FG ipsis AC & DF perpendiculares, & jungantur AK & DG .

Quoniam igitur triangula ABC & AKC sunt super eadem basi & in iisdem parallelis, erit ABC ipsi AKC æquale

æquale (1), & similiter est DGF ipsi DEF æquale; si vero (1) *per prop.*
 rectæ CK & FG pro basibus triangulorum AKC & DGF 37. l. 1.
 sumantur, erunt ipsorum altitudines AC & DF æquales (2) *per by-*
 (2), & ergo sunt inter se ut CK & FG (3), & proinde (3) *per cor.*
 ABC & DEF, ipsis æqualia, sunt inter se ut CK & FG, *prac.*
 hæ vero sunt ipsorum altitudinibus æquales (4); paral- (4) *per prop.*
 logramma vero triangulorum sunt dupla & proinde sunt 34. l. 1.
 quoque inter se ut CK & FG. 35. def. 3. l. 6.

PROP. II. THEOR.

Si ad latus quodvis (AC) trianguli (ABC), ducatur Fig. 4.
 parallela (DE), proportionaliter secabit reliqua
 latera, vel latera producta.

Et si recta (DE) secet latera trianguli, vel latera
 producta, proportionaliter, erit reliquo lateri (AC)
 parallela.

Pars. I. Sit DE parallela ad AC, & erit AD ad
 DB ut CE ad EB.

Ducantur enim AE & DC, & quoniam triangula EAD (1) *per prop.*
 & ECD sunt super basi eadem ED, & in iisdem parallelis 37. l. 1.
 ED & CA, erunt æqualia (1), habet igitur AED ad DEB (2) *per prop.*
 eandem rationem quam habet CDE ad eandem EDB (2), 14. l. 5.
 sed est AED ad DEB ut AD ad DB (3), & CDE ad EDB (3) *per prop.*
 ut CE ad EB (3), & ergo habet AD ad DB eandem ratio- 1. l. 6.
 nem quam habet CE ad EB (4). (4) *per prop.* 18. l. 5.

Pars. II. Sit AD ad DB ut CE ad EB, & erit DE ipsi
 AC parallela.

Manente enim constructione præcedente, quoniam est
 AD ad DB ut CE ad EB, ut AD vero ad DB ita triangu-
 lum AED ad triangulum DEB (5), & ut CE ad EB ita (5) *per prop.*
 triangulum CDE ad triangulum EDB (5), erit AED ad (6) *per prop.*
 DEB ut CDE ad eandem EDB (6), & proinde AED 18. l. 5.
 ipsi CDE æquale est (7), sunt vero super eadem basi DE (7) *per prop.*
 & ad easdem partes, & proinde est DE ipsi AC paral- 15. l. 5.
 lela (8). (8) *per prop.* 39. l. 1.

Cor. Si ad latus BC, trianguli BAC, ductæ fuerint
 plures rectæ parallelæ, IO & FL, erunt omnia segmenta Fig. 5.
 laterum proportionalia.

Ductâ enim FQ ipsi AC parallelâ, erit in triangulo (1) *per prop.*
 BFQ, BI ad IF ut QS ad SF (1), sed propter parallelo- *prac.*
 gramma

gramma QO & SL, est CO ipsi QS æqualis & OL ipsi SF (2), & ergo est CO ad OL ut BI ad IF, & similiter demonstrari potest si sint plures.

PROP. III. THEOR.

Fig. 6.
Vide N.

Recta (AD) bisecans angulum trianguli (BAC) secat latus oppositum in segmenta (BD, DC) reliquis lateribus (BA, AC) proportionalia.

Et recta (AD) ab angulo trianguli ducta secans latus oppositum (BC) in segmenta (BD, DC) reliquis lateribus (BA, AC) proportionalia, angulum istum bisecat.

Pars. I. Per C ducatur CE ipsi AD parallela, cui occurrat BA producta, in E.

Quoniam igitur AD & EC parallelæ sunt, angulus BAD interno ad easdem partes AEC æqualis est (1), & ergo angulus DAC ipsi AEC æqualis est (2), sed est DAC angulo alterno ACE æqualis (1), & proinde ipsi AEC & ACE æquantur, & ergo sunt latera opposita AC & AE æqualia (3); sed propter AD ipsi EC parallelam, est EA ad AB ut CD ad DB (4), & ergo quoniam EA & AC æquantur, est AC ad AB ut CD ad DB.

Pars. II. Manente constructione præcedente, est BA ad AE ut BD ad DC (5), sed ut BD ad DC ita est BA ad AC (6), & ergo est BA ad AE ut BA ad AC (7), æquales igitur sunt AE & AC (8), & proinde angulus ACE angulo AEC æquatur (9); sed propter parallelas AD & EC, angulus DAC angulo alterno ACE æqualis est (10), & angulus BAD interno ad easdem partes AEC æqualis est, & quoniam ACE & AEC æquantur, DAC & BAD quoque sunt æquales, & proinde recta AD angulum BAC bisecat.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Æ Quiangulorum triangulorum (*BAC & CDE*) Fig. 7.
latera circum angulos æquales sunt proportionalia. Latera vero quæ æqualibus angulis subtenduntur, sunt homologa.

Ponantur enim latera BC & CE, æqualibus angulis BAC & CDE opposita, in directum, ita ut triangula sint ad easdem partes, anguli vero æquales BCA & CED non sint contermini; & quoniam anguli ABC & BCA duobus rectis minores sunt (1), CED vero ipsi BCA æqualis, (1) *per prop.*
 erunt ABC & CED duobus rectis minores & proinde con- 17. l. 1.
 current rectæ BA & ED si producantur (2), sit ergo ipsa- (2) *per ax.*
 rum concursus in F, & propter angulos BCA & CED 11. l. 1.
 æquales (3) erunt CA & EF parallelæ (4), & propter (3) *per by-*
 ABC & DCE æquales erunt quoque CD & BF parallelæ (4) *potb.*
 (4), est igitur AFDC parallelogrammum, & proinde 28. l. 1.
 AC ipsi FD æqualis est & AF ipsi CD (5). (5) *per prop.*

Quoniam igitur in triangulo BFE, est AC ipsi FE pa- 34. l. 1.
 rallela, erit BA ad AF, seu ad CD ipsi AF æqualem, ut
 BC ad CE (6), & ergo, alternando, est AB ad BC ut DC
 ad CE; & quoniam CD ipsi BF parallela est, erit BC ad (6) *per prop.*
 CE ut FD, seu AC ipsi FD æqualis, ad DE (6) & ergo, 2. l. 6.
 alternando, est BC ad CA ut CE ad ED; proinde quo-
 niam est AB ad BC ut DC ad CE, BC vero ad CA ut CE
 ad ED, erit, ex æquali (7), AB ad AC, ut DC ad DE. (7) *per prop.*
 Latera igitur circum angulos æquales proportionalia sunt, 34. l. 5.
 quæ vero æqualibus angulis opponuntur, homologa.

Schol. Patet triangula BAC & CDE esse similia, &
 quoque latera quæ æqualibus angulis opponuntur esse pro-
 portionalia.

Cor. 1. Si in triangulo ABC lateri cuius AC ducatur Fig. 4.
 parallela DE, erit triangulum abscissum DBE, toti
 simile.

Est enim, ob angulum B communem, angulosque BDE, (1) *per prop.*
 BED internis ad easdem partes BAC, BCA æquales (1), 29. l. 1.
 ipsi æquiangulum, & proinde simile (2). (2) *per sch.*

Cor. 2. Si ad latus quodvis AC trianguli ABC ducatur *præc.*
 parallela DE, recta BO ab angulo opposito secabit paral- Fig. 8.
 elas in partes proportionales.

Q

Nam

Nam quoniam in triangulo ABO, DI ipsi AO parallela est, erit AO ad DI ut OB ad IB (1), & similiter est OC ad IE ut OB ad IB, & ergo AO ad DI ut OC ad IE (2), & alternando, AO ad OC ut DI ad IE.

(1) *per scb.*
buj. prop.
 (2) *per prop.*
 18. l. 5.

PROP. V. THEOR.

Fig. 9.

SI duo triangula (*ABC, DEF*) habeant latera proportionalia (*BA ad AC ut ED ad DF, & AC ad CB ut DF ad FE*), erunt æquiangulara, anguli vero æquales lateribus homologis subtenduntur.

Ad terminos lateris cujuscvis DE, trianguli alterutrius DEF, constituentur anguli EDG & DEG, angulis A & B ad terminos lateris AB ipsi ED homologi æquales, & erit in triangulo DEG reliquus angulus G reliquo C in triangulo ABC æqualis (1).

(1) *per cor.*
 2. P. 32. l. 1. Quoniam igitur triangulum ABC triangulo DEG æqui-
 (2) *per const.* angulum est (2), erit BA ad AC ut ED ad DG (3), est
 (3) *per prop.* vero BA ad AC ut ED ad DF (4), & proinde ED est
 4. l. 6. ad DG ut ED ad DF (5), & ergo æquantur DG & DF
 (4) *per hyp.* (6); similiter demonstrari potest EG & EF esse æquales,
 (5) *per prop.* & ergo triangulum EDG triangulo EDF æquilaterum est
 18. l. 5. & proinde æquiangulum (7), ipsi vero EDG æquiangu-
 (6) *per prop.* lum est BAC (8), & ergo BAC ipsi EDF quoque æqui-
 15. l. 5. angulum est, patet vero angulos æquales a lateribus
 (7) *per scb.* homologis subtendi.
 p. 8. l. 1.
 (8) *per const.*

PROP. VI. THEOR.

Fig. 9.
Vide N.

SI duo triangula (*ABC, DEF*) unum angulum uni æqualem habeant (*A ipsi D*), circa æquales angulos vero latera proportionalia (*BA ad AC ut ED ad DF*), æquiangulara erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

Cum alterutro crure DE alterutrius ex angulis æqualibus A & D, & ad terminum ejus alterutrum D, constitutur angulus EDG angulo A æqualis, & ad E constitutur angulus DEG angulo B æqualis, & erit in triangulo DEG reliquus angulus G reliquo C in triangulo ABC æqualis (1).

(1) *per cor.*
 2. P. 32.
 l. 1.

Quoniam

Quoniam igitur triangulum ABC triangulo DEG æqui-
angulum est (2), erit BA ad AC ut ED ad DG (3), est (2) *per const.*
vero BA ad AC ut ED ad DF (4), & proinde ED est ad (3) *per prop.*
DG ut ED ad DF (5), & ergo æquantur DG & DF (6), *4. l. 6.*
sunt vero anguli EDG & EDF æquales quoniam uterque *(4) per hy-*
angulo A æquatur (7), & latus ED utrique triangulo com- *potb.*
mune est, & igitur triangulum EDF triangulo EDG æqui- *(5) per prop.*
angulum est (8), sed BAC ipsi EDG æquiangulum est *18. l. 5.*
(9), & ergo BAC ipsi EDF quoque æquiangulum est, *(6) per prop.*
patet vero angulos æquales a lateribus homologis sub- *15. l. 5.*
tendi. *(7) per hy-*
potb. &
const.
(8) per prop.
4. l. 1.
(9) per const.

PROP. VII. THEOR.

SIduo triangula (ABC, DEF) habeant unum an- *Fig. 10.*
gulum uni æqualem (B ipsi E), & latera circa
duos ex reliquis proportionalia (BA ad AC ut ED
ad DF), duo vero reliqui (C & F) vel simul mi-
nores, vel simul non minores recto, erunt triangula
æquiangula, & æquales habebunt angulos circa quos
latera sunt proportionalia.

Sint primo angulus uterque C & F recto minor, &
erunt BAC & EDF æquales.

Non enim, sed, si fieri potest, sit alteruter eorum
BAC major, & ad punctum A cum rectâ BA constitua-
tur angulus BAG minori EDF æqualis.

Quoniam igitur in triangulis DEF, ABG anguli E
& B æquales sunt (1), & EDF & BAG quoque æqua- *(1) per hy-*
les (2), erit EFD ipsi BGA æqualis (3); triangula igitur *potb.*
sunt æquiangula & proinde est BA ad AG ut ED ad DF *(2) per const.*
(4), est vero BA ad AC ut ED ad DF (5), & ergo *(3) per cor.*
BA est ad AG ut BA ad AC (6), & AG igitur ipsi *2. p. 32.*
AC æqualis est (7), proinde est angulus ACG angulo *l. 1.*
AGC æqualis (8), & ergo uterque acutus est (9), & *(4) per prop.*
quoniam AGC acutus est erit AGB obtusus, & ergo *4. l. 6.*
EFD ipsi AGB æqualis est quoque obtusus, ponitur *(5) per hy-*
vero EFD esse acutum, quod absurdum. *potb.*
(6) per prop.
18. l. 5.
(7) per prop.
15. l. 5.
(8) per prop.
5. l. 1.
(9) per cor.
p. 17. l. 1.
(10) per hy-
potb.

Non est igitur BAC ipso EDF major, & similiter de-
monstrari potest EDF non maiorem esse ipso BAC, sunt
proinde æquales, & quoniam anguli ABC & DEF quo-
que æquantur (10), erunt triangula æquiangula (11),

Q2

& ergo

(11) *per cor.* & ergo habent latera circa angulos æquales proportionalia (12).
2. p. 32.
l. 1.

(12) *per prop. 4. l. 6.* Similiter demonstrari potest si angulus uterque C & F non minor sit recto, angulos BAC & EDF esse æquales & ergo triangu-
la æquiangu-
la esse, & proinde habere latera circa angulos æquales proportionalia.

Cor. 1. Si in duobus triangulis ABC & DEF unus angulus B uni E æqualis sit, & circa duos alios latera proportionalia, BA ad AC ut ED ad DF, & ex reliquis alteruter C rectus, erunt triangu-
la æquiangu-
la; manente enim constructione propositionis præcedentis, demonstrari potest triangulum CAG esse isosceles, & ergo angulum AGC angulo C recto æqualem esse, quod absurdum.

Cor. 2. Si latera angulis quibuscunque æqualibus opposita fuerint æqualia, ipsa triangu-
la æqualia forent, ut patet ex Prop. 26. l. 1.

PROP. VIII. THEOR.

Fig. 11.

SI in triangulo rectangulo (ABC) ducatur ab angulo recto perpendicularis (BF) in latus oppositum, dividet triangulum in partes & toti & inter se similes.

Nam in triangulis ABF & ABC angulus AFB angulo ABC æqualis est (1), angulus vero A communis, reliquus igitur ABF reliquo C æquatur (2), & ergo triangu-
la sunt æquiangu-
la, proinde latera circa angulos æquales sunt proportionalia (3), & ergo triangu-
la sunt simili-
lia (4).
(1) *per by-poth.*
(2) *per cor. 2. p. 32. l. 1.*
(3) *per prop. 4. l. 6.*

Similiter demonstrari potest triangulum FBC triangulo ABC simile esse.
(4) *per def. 1. l. 6.*

Quoniam igitur angulus ABF angulo C æqualis est, anguli vero AFB & BFC quoque æquantur, erit reliquus A reliquo FBC æqualis & ergo triangu-
la ABF & FBC æquiangu-
la sunt, & proinde latera circa angulos æquales sunt proportionalia (5), & ergo triangu-
la sunt similia.
(5) *per prop. 4. l. 6.*

Cor. Hinc patet perpendicularem BF mediam esse proportionalem inter segmenta AF & FC lateris in quod incidit; reliqua vero latera AB & BC media proportio-
nalia

naliam esse inter segmenta AF & FC ipsis contermina, & totum latus AC.

PROP. IX. PROB.

A *Datâ rectâ (AB) imperatam partem abscindere.* Fig. 12.

A termino alterutro A rectæ datæ ducatur AD angulum quemcumque cum ipsâ AB continens, & sumpto in ipsâ puncto quovis C, fiat AD eadem multiplex ipsius AC ac est AB partis abscindendæ, & ductâ BD ducatur per C recta CI ipsi BD parallela, erit AI pars quaesita.

Est enim AI ad AB ut AC ad AD (1), & ergo (1) *per cor.*
quoniam AC submultiplex est ipsius AD (2), erit AI *1. P. 4.*
æque submultiplex ipsius AB (3). *l. 6.*

(2) *per const.*
(3) *per prop.*
13. l. 5.

PROP. X. PROB.

D *Atam rectam infectam (AB) datæ rectæ sectæ (FG) similiter secare.* Fig. 13.

A termino alterutro A datæ infectæ AB ducatur recta AC angulum quemcumque cum ipsâ continens, & sumantur AD, DI & IL æquales partibus FP, PR & RG in quas data FG secta est (1), & ducta LB ducantur per I & D rectæ IK & DO ipsi LB parallelæ. (1) *per prop.*
3. l. 1.

Quoniam igitur in triangulo BAL rectæ KI & OD lateri BL parallelæ sunt, erit BK ad KO ut LI ad ID (2), seu ut GR ad RP (3), & KO ad OA ut ID ad DA (2) *per cor.*
(2), seu ut RP ad PF (3), et ergo data AB similiter *P. 2. l. 6.*
datæ FG fecatur. (3) *per const.*

PROP. XI. PROB.

D *Atis duabus rectis (AB & FG), tertiam proportionalem invenire* Fig. 14.
Vide N.

A termino alterutrius ex datis AB ducatur recta AE angulum quemcumque cum ipsâ continens, & sumpta AC alteri datæ FG æqualis, ducatur BC, & producta AB in ipsâ sumatur BD ipsi FG æqualis, & per D ducatur DE

DE ipsi BC parallela, erit CE tertia proportionalis quæsitæ.

Quoniam enim in triangulo DAE recta BC lateri DE
 (1) *per prop.* parallela est, erit AB ad BD ut AC ad CE (1), sunt
 2. l. 6. vero BD & AC ipsi FG æquales (2), & ergo est AB
 (2) *per const.* ad FG ut FG ad CE.

PROP. XII. PROB.

Fig. 15.

Datis tribus rectis (*F, E & G*) quartam proportionalem invenire.

Ducantur duæ rectæ AD & AI angulum quemcunque continentes, & sumantur in ipsis AB, BD & AC ipsis *F, E & G* æquales, & ducta BC ducatur per D recta DI ipsi BC parallela, erit CI quarta proportionalis quæsitæ.

Quoniam enim in triangulo DAI recta BC lateri DI
 (1) *per prop.* parallela est, erit AB ad BD ut AC ad CI (1), sunt
 2. l. 6. vero datæ *F, E & G* ipsis AB, BD & AC æquales (2),
 (2) *per const.* & proinde est *F* ad *E* ut *G* ad *CI*.

PROP. XIII. PROB.

Fig. 16.
Vide N.

Datis duabus rectis (*E & F*) mediam proportionalem invenire.

Ductâ utcunque rectâ AC, sumantur in ipsâ AB & BC datis *E & F* æquales, bifecetur AC in D, & centro D per A describatur semicirculus AIC, & per B ducatur BI ipsi AC perpendicularis circumferentiæ occurrens in I, erit BI media proportionalis quæsitæ.

Ducantur enim AI & IC, & quoniam in triangulo
 (1) *per prop.* AIC angulus I in semicirculo rectus est (1), ab ip-
 31. l. 3. so vero in latus oppositum ducta est perpendicularis IB,
 (2) *per cor.* erit IB media proportionalis inter AB & BC (2), &
 P. 8. l. 6. ergo inter datas *E & F* ipsis AB & BC æquales (3).
 (2) *per const.*

Cor. Similiter inter datas & hanc mediam inveniri possunt mediæ proportionales, unde series oritur quinque rectarum continuè proportionalium, & iterum inventis inter adjacentes in hac serie mediis, series oritur novem proportionalium, & ita deinceps.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Parallelogrammorum æqualium, & unum angulum uni æqualem habentium (AD & GC), latera circum angulos æquales reciproce proportionalia sunt (AB ad BC ut BG ad BD). Et si duo parallelogramma (AD & GC) unum angulum uni æqualem habeant, latera vero circa ipsos reciproce proportionalia, erunt inter se æqualia. Fig. 17.

Pars. I. Ponantur latera duo AB & BC circum angulos æquales in directum, & quoniam ABD & DBC (1) *per prop.* duobus rectis æquales sunt (1), GBC vero ipsi ABD (2) *per by-* æqualis est (2), erunt GBC & DBC duobus rectis æqua- *potb.* les, & proinde GB & BD sunt in directum (3), com- (3) *per prop.* pleatur igitur parallelogrammum DC . *14. l. 1.*

Quoniam parallelogramma AD & GC æqualia sunt (4) *per by-* (4), est AD ad DC ut GC ad DC (5), sed AD est ad *potb.* DC ut AB ad BC (6), & GC est ad DC ut GB ad (5) *per prop.* BD (6), & proinde est AB ad BC ut GB ad BD (6) *per prop.* (7). *14. l. 5.*

Pars. II. Eâdem manente constructione, est AD (7) *per prop.* ad DC ut AB ad BC , GC vero ad DC ut GB ad BD , (8) *per by-* sed est AB ad BC ut GB ad BD (8), & proinde est *potb.* AD ad DC ut GC ad DC (9), & ergo AD ipsi GC (9) *per prop.* æquale est (10). *18. l. 5.*

(10) *per prop. 15. l. 5.*

PROP. XV. THEOR.

Triangulorum æqualium & unum angulum uni æqualem habentium (ABD & CBL), latera circum angulos æquales reciproce proportionalia sunt (AB ad BC ut LB ad BD). Et si duo triangu- Fig. 18. la (ABD & CBL) unum angulum uni æqualem habeant, latera vero circum ipsos reciproce proportionalia, erunt inter se æqualia.

Pars. I. Ponantur latera duo AB & BC circum angulos æquales in directum, & quoniam ABD & DBC (1) *per prop.* duobus rectis æquales sunt (1), LBC vero ipsi ABD (1) *per prop.* æqualis (13. l. 1.).

(2) *per hypoth.* æqualis est (2), erunt DBC & LBC duobus rectis æquales & proinde DB & BL sunt in directum (3), ducatur igitur DC.

(4) *per hypoth.* Quoniam triangula ABD & LBC æqualia sunt (4), est ABD ad DBC ut LBC ad idem DBC (5), sed ABD est ad DBC ut AB ad BC (6) & LBC est ad DBC ut LB ad BD (6), & proinde est AB ad BC ut LB ad BD (7).

(7) *per prop.* Pars. II. Eâdem manente constructione, est ABD ad DBC ut AB ad BC, LBC vero ad DBC ut LB ad BD, sed est AB ad BC ut LB ad BD (8), & proinde est ABD ad DBC ut LBC ad DBC (9), & ergo ABD ipsi LBC æquale est (10).

(10) *per prop.* Cor. 1. Ex hac propositione & præcedente patet triangula vel parallelogramma quorum bases & altitudines reciprocè proportionales sunt, esse æqualia.

Fig. 19. Cor. 2. Si duo triangula ABC & DFE habeant duo latera duobus reciprocè proportionalia, AB ad EF ut ED ad AC, anguli vero inter hæc latera simul duobus rectis æquales, erunt triangula æqualia.

Compleantur enim parallelogramma AL & DF, & quoniam anguli BAC & DEF simul duobus rectis æquantur (1), BAC vero & ACL quoque duobus rectis sunt æquales (2), erunt DEF & ACL æquales; est vero BA ad EF ut ED ad AC (1), & CL ipsi AB æquatur (3), & ergo CL est ad EF ut ED ad AC, & æquales sunt anguli ACL & DEF, parallelogrammum igitur AL parallelogrammo DF æquale est (4), & proinde triangula ABC & DEF quæ ipsorum dimidia sunt (5), quoque æquantur.

(1) *per hypoth.*
(2) *per prop. 29. l. 1.*
(3) *per prop. 34. l. 1.*
(4) *per prop. 14. l. 6.*
(5) *per prop. 34. l. 1.*
Cor. 3. Similiter si duo triangula æqualia ABC & DEF, duos angulos BAC & DEF simul duobus rectis æquales habeant, erunt latera circum ipsos reciprocè proportionalia.

PROP. XVI. THEOR.

SI sint quatuor rectæ proportionales (*A* ad *B* ut *C* ad *D*) erit rectangulum sub extremis (*A* & *D*) æquale rectangulo sub mediis (*B* & *C*). Et si sint quatuor rectæ (*A*, *B*, *C* & *D*) rectangulum vero sub extremis æquale sit rectangulo sub mediis, erunt quatuor rectæ proportionales. Fig. 20.

Pars. I. Ducantur *AE* & *GC* ipsis *D* & *C* æquales, iisque erigantur *AF* & *CK* perpendiculares, ipsis *A* & *B* æquales, & compleantur rectangula *EF* & *GK*.

Quoniam igitur in parallelogrammis *EF* & *GK* anguli (*1*) per hy-
A & *C* sunt æquales, latera vero circa ipsos reciprocè sunt potb. & const.
 proportionalia (*1*), erit *EF* ipsi *GK* æquale (*2*). (2) per prop. 14. l. 6.

Pars. II. Eâdem manente constructione, quoniam (3) per by-
potb.
 parallelogramma *EF* & *GK* æquantur (*3*), anguli vero (4) per prop. 14. l. 6.
A & *C* sunt æquales, erit *AF* ad *CK* ut *GC* ad *AE* (*4*), & ergo est *A* ad *B* ut *C* ad *D* (*5*). (5) per const.

Cor. 1. Si sint quatuor rectæ proportionales, erit parallelogrammum sub extremis æquale parallelogrammo æquiangolo sub mediis.

Cor. 2. In quovis triangulo *BAC*, rectangulum sub Fig. 21.
 duobus lateribus *BA* & *AC*, æquatur quadrato rectæ *AD*
 biëcantis angulum inter ipsa, una cum rectangulo sub
 segmentis *BD* & *DC* lateris isti angulo oppositi.

Triangulo *BAC* circumscribatur circulus cujus circumferentiæ occurrat *AD* producta in *E*, & ducatur *EC*.

Quoniam igitur angulus *BAD* angulo *DAC* æquatur (*1*), & anguli *ABD* & *AEC* eidem arcui *AC* insistentes (1) per by-
potb.
 sunt quoque æquales (*2*), erunt triangula *BAD* & *EAC* (2) per prop. 21. l. 3.
 æquiangula, & ergo est *BA* ad *AD* ut *EA* ad *AC* (*3*), (3) per prop. 4. l. 6.
 rectangulum igitur sub *BA* & *AC* rectangulo sub *EA* & (4) per prop. 4. l. 6.
AD æquale est (*4*), & proinde rectangulo sub *ED* & (5) per prop. 3. l. 2.
DA cum quadrato ex *DA* æquale est (*5*), rectangulum (6) per prop. 35. l. 3.
 vero sub *ED* & *DA* rectangulo sub *BD* & *DC* æquatur (*6*), & proinde rectangulum sub *BA* & *AC* rectangulo
 sub *BD* & *DC* cum quadrato ex *AD* æquale est.

Cor. 3. Si ab angulo quovis *A* trianguli *BAC* cadat Fig. 22.
 perpendicularis *AD* in latus oppositum, erit rectangulum
 sub lateribus *BA* & *AC* circum angulum istum æquale
 rectangulo sub perpendiculari & diametro circuli circa
 triangulum circumscripti.

R

Nam

Nam triangulo BAC circumscribatur circulus, & ducta diametro AE ducatur EC.

- (1) *per prop.* Quoniam igitur angulus rectus ADB angulo ECA in
31. l. 3. semicirculo æqualis est (1), anguli vero ABC & AEC
(2) *per prop.* eidem arcui AC insistentes sunt quoque æquales (2), erit
21. l. 3. triangulum BAD triangulo AEC æquiangulum, & igitur
(3) *per prop.* est BA ad AD ut AE ad AC (3), & proinde rectangu-
4. l. 6. lum sub BA & AC rectangulo sub AD & AE æquale est
(4) *per prop.* præc. (4).

Fig. 23.

Cor. 4. In quadrilatero ABCD in circulo inscripto, erit rectangulum sub diagonalibus AC & BD æquale rectangulis sub lateribus oppositis AB & CD, & BC & AD.

- Angulo CBD constituatur angulus ABE æqualis, & in
triangulis ABE & DBC anguli ABE & DBC æquales sunt,
& quoque anguli BAE & BDC eidem arcui BC insistentes
æquantur (1), sunt igitur triangula ABE & DBC æqui-
(1) *per prop.* angula & ergo est AB ad AE ut DB ad DC (2), & pro-
21. l. 3. inde rectangulum sub AB & DC rectangulo sub AE &
(2) *per prop.* DB æquale est (3); quoniam vero angulus ABE angulo
4. l. 6. CBD æqualis est (4), addito communi EBD erunt anguli
(3) *per prop.* ABD & CBE æquales, & quoque anguli BDA & BCE
præc. (4) *per const.* eidem arcui BA insistentes æquantur (5), sunt igitur tri-
(5) *per prop.* angula ADB & ECB æquiangula, & ergo est AD ad DB
21. l. 3. ut EC ad CB (6), & proinde rectangulum sub AD & BC
(6) *per prop.* rectangulo sub DB & EC æquale est (7), rectangulum
4. l. 6. vero sub AB & DC rectangulo sub DB & AE æquale est,
(7) *per prop.* & ergo erunt rectangula sub AB & DC & sub AD & BC
præc. (8) *per prop.* rectangulo sub DB & AC æqualia (8).
1. l. 2.

PROP. XVII. THEOR.

Fig. 24.

SI sint tres rectæ proportionales (*A ad B ut B ad C*)
erit rectangulum sub extremis æquale quadrato quod
fit a mediâ. Et si rectangulum sub extremis æquale
fit quadrato quod fit a mediâ, erunt tres rectæ propor-
tionales.

- Pars. I.* Sumatur D ipsi B æqualis; erit igitur A
(1) *per prop.* ad B ut D ad C (1), & igitur rectangulum sub A & C
14. l. 5. rectangulo sub B & D æquale est (2), & ergo quadrato ex
(2) *per prop.* B æquatur.
16. l. 6.

Pars. II.

Pars. II. Sumatur D ipsi B æqualis, & erit rectangulum sub A & C rectangulo sub B & D æquale, & igitur (3) *per prop.* est A ad B ut D ad C (3), & ergo est A ad B ut B ad C (4). 16. l. 3.
(4) *per prop.*
14. l. 5.

Cor. Si sint tres rectæ proportionales, erit parallelogrammum sub extremis æquale parallelogrammo æquianguulo quod fit ex mediâ.

P R O P. XVIII. P R O B.

A datâ rectâ (AB) rectilineo dato (FGIKL) simile Fig. 25. & similiter positum rectilineum describere.

Ductis FI & FK constituentur cum recta AB & ad puncta in ipsâ A & B anguli BAC & ABC angulis LFK & FLK æquales, concurrent AC & BC in C & erit angulus BCA angulo LKF æqualis (1), similiter super AC describatur (1) *per cor.* triangulum triangulo FKI æquianguulum, & ita dein- 2. p. 32. l. 1. ceps.

Quoniam igitur angulus ABC angulo FLK æqualis est (1), & propter angulum BCA ipsi LKF æqualem & ACD (1) *per const.* ipsi FKI (1), est quoque BCD ipsi LKI æqualis, & ita deinceps ostendi potest singulum angulum in figurâ AEDCB singulo in FGIKL æqualem esse, est AEDCB dato FGIKL æquianguulum. Est vero triangulum ABC triangulo FLK æquianguulum (1) & proinde AB est ad BC ut FL ad LK (2), & quoque BC ad CA ut LK ad KF (2), sed est (2) *per prop.* ACD ipsi FKI æquianguulum, & ergo CA est ad CD ut 4. l. 6. KF ad KI (2), & ergo erit ex æquali (3), BC ad CD ut (3) *per prop.* LK ad KI, & similiter ostendi potest latera circa reliquos 34. l. 5. angulos esse proportionalia, & quoniam sunt quoque AEDCB & FGIKL æquiangula erunt inter se similia (4) *per def.* 1. l. 6. (4).

P R O P. XIX. T H E O R.

Similia triangula (ABC, FIL) sunt inter se in du- Fig. 26. plicatâ ratione laterum homologorum.

Lateribus homologis AC & FL sumatur tertia proportionalis KC & ducatur BK.

Quoniam igitur est AC ad CB ut FL ad LI (1), erit (1) *per by-* permutando AC ad FL ut CB ad LI (2), est vero AC ad FL (2) *per prop.*
33. l. 5.

- (3) *per conf.* FL ut FL ad CK (3), & ergo est CB ad LI ut FL ad
 (4) *per prop.* CK (4), sed est angulus C angulo L æqualis (1), & pro-
 18. l. 5. inde triangulum KBC triangulo FIL æquatur (5); ha-
 (5) *per prop.* bet igitur ABC ad utrumque eandem rationem (6), est vero
 15. l. 6. ABC ad KBC ut AC ad KC (7), & ergo est ABC ad FIL
 (6) *per prop.* ut AC ad KC, seu in duplicatâ ratione ipsius AC ad
 14. l. 5. FL (8).
 (7) *per prop.* FL (8).
 1. l. 6.
 (8) *per def.*
 10. l. 5.

PROP. XX. THEOR.

Fig 25.

Similia polygona (FGIKL & AEDCB) in similia triangula dividuntur, numero æqualia & totis homologa; & polygona inter se sunt in duplicatâ ratione laterum homologorum.

- Pars. I.* Quoniam in triangulis FGI & AED anguli G & E æquales sunt, latera vero circa ipsos proportionalia (1), erunt FGI & AED similia (2); quoniam igitur anguli GIF & EDA æquales sunt, toti vero GIK & EDC æquantur (1), erunt reliqui FIK & ADC æquales, & quoniam est FI ad IG ut AD ad DE, IG vero ad IK ut DE ad DC (1), erit ex æquali FI ad IK ut AD ad DC (3), & ergo propter angulos inter ipsos æquales, erit triangulum FIK triangulo ADC simile (4), & reliqua quoque triangula similia esse similiter ostendi potest.
- (1) *per hypoth. & def.*
 1. l. 6.
 (2) *per prop.*
 6. l. 6.
 (3) *per prop.*
 33. l. 5.
 (4) *per prop.*
 6. l. 6.

- Pars. II.* Quoniam triangulum FGI triangulo AED simile est, erit FGI ad AED in duplicatâ ratione lateris FI ad AD (5), similiter est quoque FIK ad ADC in duplicatâ ratione ipsius FI ad AD, proinde est FGI ad AED ut FIK ad ADC (6), & ita quoque ostendi potest FIK esse ad ADC ut FKL ad ACB, ut igitur unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia (7), seu polygonum FGIKL ad polygonum AEDCB.
- (5) *per prop.*
 19. l. 6.
 (6) *per prop.*
 18. l. 5.
 (7) *per prop.*
 22. l. 5.

- Pars. III.* Quoniam polygonum FGIKL est ad polygonum AEDCB ut triangulum FGI ad triangulum AED, FGI vero est ad AED in duplicatâ ratione lateris FG ad latus AE (8), erit quoque FGIKL ad AEDCB in duplicatâ ratione ipsius FG ad AE (9).
- (8) *per prop.*
 19. l. 5.
 (9) *per prop.*
 18. l. 5.
Vide N.

Cor. 1. Hinc si tres rectæ fuerint proportionales, erit figura rectilinea super primâ ad similem similiterque positam super secundâ ut prima ad tertiam.

Cor

Cor. 2. Hinc describi potest figura quæ sit ad datam in quâvis ratione datâ; inveniatur enim inter latus figuræ & rectam quæ sit ad ipsum in ratione datâ mediam proportionalem, & super ipsâ constituatur figura datæ similis similiterque posita.

PROP. XXI. THEOR.

Rectilinea (*A* & *B*) quæ eidem (*C*) similia sunt, Fig. 27.
inter se quoque sunt similia.

Quoniam enim rectilineum *A* rectilineo *C* simile est, ipsi est æquiangulum & latera circum angulos æquales habet proportionalia (1), & quoniam rectilineum *B* rectilineo *C* simile est, ipsi est æquiangulum & latera circum angulos æquales habet proportionalia (1), sunt igitur *A* & *B* inter se quoque æquiangula (2), & latera circum angulos æquales habent proportionalia (3), & igitur sunt *A* & *B* similia.

(1) per def. 1. l. 6.
(2) per ax. 1. l. 1.
(3) per prop. 18. l. 5.

PROP. XXII. THEOR.

Si sint quatuor rectæ proportionales (*AB* ad *CD* ut *EF* ad *GH*) erunt quoque rectilinea similia similiterque ab ipsis descripta, proportionalia. Et si rectilinea similia similiterque a quatuor rectis descripta sunt proportionalia, ipsæ rectæ erunt proportionales. Vide N.

Pars. I. Sumatur ipsis *AB* & *CD* tertia proportionalis *X*, ipsis vero *EF* & *GH* tertia proportionalis *O*, & quoniam est *AB* ad *CD* ut *EF* ad *GH* (1), erit *CD* ad *X* ut *GH* ad *O* (2), & ergo ex æquali erit *AB* ad *X* ut *EF* ad *O* (3), sed est *AKB* ad *CLD* ut *AB* ad *X* (4), & *EM* ad *GN* ut *EF* ad *O*, & proinde est *AKB* ad *CLD* ut *EM* ad *GN*.

(1) per hy-
(2) per prop. 18. l. 5.
(3) per prop. 33. l. 5.

Pars. II. Manente eâdem constructione, quoniam est *AKB* ad *CLD* ut *EM* ad *GN* (5) erit *AB* ad *X* ut *EF* ad *O* (6), & ergo est *AB* ad *CD* ut *EF* ad *GH* (7).

(4) per cor. 1. p. 20.
(5) per by-
potb.
(6) per prop. 18. l. 5.
(7) per prop. 39. l. 5.

PROP.

PROP. XXIII. THEOR.

Fig. 29.
Vide N.

Æ Quia angula parallelogramma (BD & CG) inter se rationem habent ex laterum rationibus compositam.

Ponantur latera duo BC & CF circum angulos æquales in directum, & quoniam anguli BCD & DCF duobus rectis æquales sunt (1), HCF vero ipsi BCD æquatur (2), erunt quoque DCF & FCH duobus rectis æquales & ergo DC & CH sunt in directum (3), compleatur igitur parallelogrammum CE .
Quoniam igitur est BD ad CE ut BC ad CF (4), CE vero ad CG ut DC ad CH (4), habet BD ad CG rationem compositam ex rationibus BC ad CF & DC ad CH (5).

Cor. 1. Inveniri possunt duæ rectæ quæ sunt inter se in ratione parallelogrammorum BD & CG , assumendo rectam quamvis I , ipsisque BC , CF , & I quartam proportionalem K inveniendo, ipsis vero DC , CH & K quartam proportionalem L , & erit BD ad CE ut I ad K , CE vero ad CG ut K ad L , & proinde, ex æquali, erit BD ad CG ut I ad L (1).

Cor. 2. Triangula quæ unum angulum uni æqualem habent, sunt inter se in ratione composita ex rationibus laterum circum angulos æquales.

Cor. 3. Parallelogramma vel triangula quæcunque sunt inter se in ratione composita ex rationibus basium & altitudinum, æquantur enim rectangulis, vel triangulis rectangulis super basibus æqualibus & in iisdem altitudinibus.

PROP. XXIV. THEOR.

Fig. 31.

IN omni parallelogrammo (AC) quæ circa diametrum sunt parallelogramma (AF & FC) & toti & inter se sunt similia.

Quoniam enim parallelogramma AC & AF unum angulum A habent communem, sunt æquiangula (1), sed propter

propter parallelas EF & BC triangula AEF & ABC sunt similia (2), & ergo est AE ad EF ut AB ad BC (3), (2) per cor. 1. P. 4. l. 6. reliqua vero latera ipsis AE, EF, AB & BC æqualia sunt (4), & proinde parallelogramma AF & AC habent latera (3) per def. 1. l. 6. circum angulos æquales proportionalia, & igitur sunt similia (3). (4) per prop. 34. l. 1.

Similiter demonstrari potest parallelogramma AC & FC esse similia.

Quoniam igitur utrumque AF & FC eidem AC simile est, erunt inter se quoque similia (5). (5) per prop. 21. l. 6.

PROP. XXV. PROB.

Rectilineum constituere dato (A) æquale, alteri vero dato (B) simile. Fig. 32.

Ad latus quodvis EF dati B constituatur rectangulum EL ipsi B æquale (1), & ad latus ejus FL constituatur rectangulum FD dato A æquale (1), inter latera ipsorum EF & FG inveniatur media proportionalis CK (2), figura super ipsa descripta dato B similis similiterque posita erit dato A æqualis. (1) per cor. 1. P. 45. (2) per prop. 13. l. 6.

Est enim rectangulum EL ad rectangulum FD ut EF ad FG (3), seu in duplicata ratione ipsius EF ad CK (4), & proinde ut rectilineum B ad simile similiterque positum super CK descriptum (5); est vero EL ipsi B æquale (6) & ergo rectilineum super CK descriptum ipsi B simile similiterque positum, ipsi A erit æquale (7). (3) per prop. 1. l. 6. (4) per const. (5) per prop. 20. l. 6. (6) per const. (7) per prop. 23. l. 5.

Cor. Hinc patet methodus constituendi figuram rectilineam datæ similem & differentię inter duas datas, vel ipsarum summæ æqualem, si prius constituatur parallelogrammum isti differentię vel summæ æquale (1). (1) per cor. 2. & 3 P. 45. l. 1.

PROP. XXVI. THEOR.

Si parallelogramma similia & similiter posita (AC & AF) communem habeant angulum; sunt circa eandem diametrum, Fig. 33.

Non enim, sed si fieri potest sit AIF parallelogrammi AF diameter, & per I ducatur IL ipsi AE parallela.

Quoniam igitur parallelogramma AI & AF circa eandem sunt diametrum AIF, communem vero habent angulum A, erunt AI & AF similia (1), & proinde est BA ad (1) per prop. 24. l. 6.

- ad AL ut EA ad AG, sed est BA ad AD ut EA & AG
 (2) per by- (2), & ergo BA est ad AL ut BA ad AD (3), & proinde
 potb. AL ipsi AD æquatur (4), quod absurdum.
 (3) per prop. Non est igitur AIF ipsius AF diameter & similiter nec
 18. l. 5.
 (4) per prop. alia quævis præter ipsam ACF.
 15. l. 5.

P R O P. XXVII. T H E O R.

Fig. 34 & 35.
 Vide N.

SI recta quævis (*AB*) secetur bifariam (in *C*) & inæqualiter (in *D*) erit parallelogrammum (*FC*) quod dimidia applicatur deficiens figurâ (*BG*) ipsi simili, majus parallelogrammo (*ED*) alterutri parti applicato, cujus defectus (*KB*) similis sit priori (*GB*).

Fig. 34.

Primo fit AD majus segmentum rectæ AB & compleatur parallelogrammum KI & ducatur GB.

- (1) per by- Quoniam igitur GB & KB sunt similia (1), erit GB
 potb. diameter utriusque (2), est igitur CK ipsi KI æquale
 (2) per prop. (3), & ergo si utrique addatur DL erit CL ipsi DI
 26. l. 6. æquale, sunt vero CL & CE æqualia (4), & proinde
 (3) per prop. CE & DI æquantur, utrique addatur CK & erit DE
 43. l. 1. Gnomoni CLS æquale, & proinde minus est toto paral-
 (4) per by- lelogrammo CI, hoc est parallelogrammo FC ipsi CI
 potb. & P. æquali (4).
 36. l. 1.

Fig. 35.

Jam fit AD minus segmentum, & compleatur parallelogrammum GI & ducatur KB; & quoniam parallelogramma KB & GB sunt similia (5), erunt circa eandem diametrum (6), & igitur sunt parallelogramma DG & GI æqualia (7), sed sunt FG & GL æquales (8), & proinde parallelogramma EG & GI sunt æqualia (9), est vero EG majus ipso FK, ergo erit quoque GI ipso FK majus, & ergo DG ipsi GI æquale majus est ipso FK, utriusque igitur addatur FD & erit totum FC toto ED majus.

- (5) per by-
 potb.
 (6) per prop.
 26. l. 6.
 (7) per prop.
 43. l. 1.
 (8) per by-
 potb. & P.
 34. l. 1.
 (9) per prop.
 36. l. 1.

Schol. Patet parallelogrammum KG esse excessum parallelogrammi FC super ED, idque diminui diminuto KG.

PROP. XXVIII. PROB.

AD rectam datam (AB) applicare parallelogram- Fig. 36.
 mum dato rectilineo (Z) æquale & deficiens figurâ simili dato parallelogrammo (X). Oportet autem rectilineum non majus esse parallelogrammo applicato ad dimidiam datam cujus defectus est similis dato (X).

Bifecetur AB in E , & super AE describatur parallelogrammum AG dato X simile, & compleatur $APFB$.

Erit AG dato rectilineo Z vel æquale vel majus (1) *per conditiones problematis.*

Si sit æquale, factum est quod proponebatur.

Si sit majus, constituatur parallelogrammum excessui ejus super Z æquale, dato vero X simile (2) & fit $KLMN$, & cum hoc minus est parallelogrammo AG , erit minus quam EF ipsi AG æquale (3), est vero ei simile, & ergo latera ejus KL & LM lateribus ipsius EF ipsis homologis EG & GF minora sunt, ex his ergo desumantur GK & GO ipsis KL & LM æquales, & completatur parallelogrammum $KGOI$, & erit hoc simile parallelogrammo EF quoniam utrumque eidem X simile est (4), & quoque similiter positum est, ergo sunt $KGOI$ & EF circa eandem diametrum (5), ducatur eorum diameter GIB & producat OI ad S & KI ad M & N . & quoniam parallelogrammum EF ipsis $KLMN$ & Z simul æquale est (6) KO vero ipsi $KLMN$ æquatur, erit $Gnomon ENO$ ipsi Z æquale; sunt vero EI & IF æqualia (7), & ergo si utrique addatur SN , æqualia sunt EN & SF , sed propter AE & EB æquales, EN ipsi ME æquale est (8), & proinde ME & SF æquantur & ergo si utrique addatur EI erit MS $Gnomoni ENO$ æquale, sed $Gnomon ENO$ dato rectilineo Z æquatur, ergo MS dato Z æquale est, & defectus ejus SN , quoniam parallelogrammo EF simile est (9), dato quoque X simile est (10), & ergo factum est quod proponebatur.

Schol. Hac methodo parallelogrammum constitutum erit super segmento majori datæ AB , super minori vero constitui potest si rectæ GO & GK desumantur ex rectâ EG producta & ex GM , & descripta figurâ ut in propositione erit AI parallelogrammum quæsitum, ut faciliè demonstratur,

(1) *per sch. prop. 27. l. 6.* demonstratur, est enim KO excessus ipsius AG supra AI (1) & est quoque excessus ejus supra dato Z, unde AI & Z æquantur.

PROP. XXIX. PROB.

Fig. 38.

AD datam rectam (AB) applicare parallelogrammum dato rectilineo (Z) æquale, & excedens figurâ (BX) simili parallelogrammo dato (X).

Bifecetur AB in E, & super EB constituatur parallelogrammum dato X simile, & constituatur parallelogrammum GH parallelogrammo EL simile, ipsis vero EL & dato Z simul æquale (1), & quoniam GH majus est ipso EL, erunt latera ipsius GK & KH majora lateribus homologis ipsius EL quæ sint FF & FL, ex his igitur productis sumantur FN & FM, ipsis GK & KH æquales, & compleatur parallelogrammum NM, & erit hoc simile parallelogrammo GH, & ergo simile ipsi EL, sed & similiter positum est, & proinde sunt circa eandem diametrum, ducatur eorum diameter FBX, & per A ducatur AC ipsi EN parallela cui occurrat PN producta. & quoniam NM & GH æqualia sunt, GH vero ipsis Z & EL simul æquatur (2), est & NM ipsis Z & EL simul æquale, desumatur utrinque EL & erit Gnomon NOL ipsi Z æquale, sed propter æquales AE & EB æquantur parallelogramma AN & EP (3), & æqualia sunt quoque EP & BM (4), ergo AN ipsi BM æquatur, commune apponatur NO & erit AX Gnomoni NOL æquale & proinde est AX dato rectilineo Z æquale, sed excessus ejus PO, parallelogrammo EL & ergo dato X similis est.

(1) *per cor. p. 25. l. 6.*
 (2) *per const.*
 (3) *per prop. 36. l. 1.*
 (4) *per prop. 43. l. 1.*

PROP. XXX. PROB.

Fig. 39.

DAtam rectam finitam AB secare in extremâ & mediâ ratione.

(1) *per prop. 46. l. 1.* Describatur ex AB quadratum BC (1), & ad AC applicetur parallelogrammum ipsi BC æquale, excedens figurâ AD ei simili (2), & quoniam AD ipsi BC similis
 (2) *per prop. 29. l. 6.* est erit quadratum, & propter æqualia BC & CD, erit desumpto

desumpto communi CE, BF ipsi AD æquale, sed est quoque ei æquiangulum ergo est EF ad ED ut EA ad EB (3), sunt vero EF & ED ipsis AB & AE æquales, (3) *per prop.* 14. l. 6. ergo est AB ad AE ut AE ad EB.

Aliter.

Secetur AB in E ita ut rectangulum sub AB & EB æquale sit quadrato ex AE (1), & erit ut AB ad AE, sic (1) *per prop.* 11. l. 2. AE ad EB (2), ergo AB secta est in extremâ & mediâ (2) *per prop.* 17. l. 6. ratione.

PROP. XXXI. THEOR.

SI a lateribus trianguli (BAC) similes figura rectilinea quacunque similiter describuntur, erit ea quæ ex latere BC recto angulo opposito describitur, reliquis duobus simul sumptis æqualis. *Fig. 40.*

Demittatur a recto angulo in latus oppositum perpendicularis AD, & erit BC ad CA ut CA ad CD (1), (1) *per cor.* ergo figura super BC est ad similem super CA ut BC ad CD (2); similiter est figura super BC ad similem super BA ut BC ad BD, ergo figura super BC ad duas figuras simul super AC & AB, ut BC ad BD & DC simul, sed est BC ipsis BD & DC æqualis, & proinde figura super BC similibus super BA & AC æquatur (3). *P. 24. l. 5.*

Cor. Hinc datis quotcunque figuris rectilineis similibus inveniri potest ope cor. 2. P. 47. l. 1. figura rectilinea quæ omnibus simul sumptis æqualis sit, & ope cor. 3. P. 47. l. 1. datis duabus similibus alia inveniri potest ipsarum differentiz æqualis. Si vero datæ non sint similes, constituentur figuræ uni ex ipsis similes & reliquis singulis æquales, & tunc inveniri potest figura summæ vel differentiz æqualis.



PROP. XXXII. THEOR.

Fig. 41.
Vide N.

SI duo triangula (ABC , CDE) habeant duo latera duobus proportionalia (AB ad BC ut CD ad DE), & ita componantur ad angulum ut latera homologa sint parallela, & ut latera non homologa (CB & CD) angulum ad quem componuntur constituent, erunt reliqua latera (AC & CE) sibi invicem in directum.

- Quoniam enim AB & CD parallelæ sunt, anguli alterni B & BCD æquantur (1), & similiter quoniam CB & ED parallelæ sunt, anguli D & BCD æquantur (1), & igitur B ipsi D æqualis est, & quoniam latera circa hos angulos proportionalia sunt (2), erunt triangula ABC & CDE æquiangula (3), & proinde æquales sunt anguli ACB & CED , est very BCD ipsi CDE æqualis, & igitur si utrinque addatur DCE , erunt ACD & DCE simul ipsis CED , EDC & DCE æquales, ACD igitur & DCE duobus rectis æquantur (4), & proinde AC & CE sunt in directum (5).
- (1) per prop. 29. l. 1.
(2) per hypoth.
(3) per prop. 6. l. 6.
(4) per prop. 32. l. 1.
(5) per prop. 14. l. 1.

PROP. XXXIII. THEOR.

Fig. 42.
Vide N.

IN æqualibus circulis anguli sive ad centrum (AFE & HOL), sive ad circumferentiam (AGE & HNL), eandem habent rationem quam arcus quibus insunt. Adhuc etiam & sectores (AFE & HOL).

Sint primo anguli dati AFE & HOL ad centrum & dividatur arcus ACE in partes quotcunque æquales AC & CE , ipsique AC æquales sumantur HI , IK & KL & ducantur FC , OI & OK .

- Quoniam igitur arcus AC , CE , HI , IK , & KL æquales sunt (1), erunt quoque anguli AFC , CFE , HOI , IOK & KOL æquales (2), qualis igitur submultiplex est AC ipsius ACE talis erit AFC ipsius AFE , quoties vero AC in ipso $HIKL$ continetur toties AFC in ipso HOL continetur, & proinde est ACE ad $HIKL$ ut AFE ad HOL (3).
- (1) per const.
(2) per prop. 27. l. 3.
(3) per def. 5. l. 5.

Similiter

Similiter si dati sint anguli AGE & HNL ad circumferentias demonstrari potest AGE esse ad HNL ut arcus ACE ad arcum HIKL.

Sed est quoque sector AFE ad sectorem HOL ut arcus ACE ad arcum HIKL.

Manente enim constructione præcedente sumantur in ipsis AC & CE puncta quævis B & D & ducantur BA, BC, DC & DE, & quoniam si auferantur æquales arcus AC & CE ex circulo AGECE, reliqui AGC & CGE æquantur, erunt anguli ABC & CDE æquales (4), & ergo (4) *per sch.* segmenta ABC & CDE similia (5), sed quoniam arcus p. 29. l. 3. ABC & CDE æquantur (6), ipsorum subtensæ AC & CE quoque æquantur (4), & proinde segmenta ABC & CDE sunt æqualia (7), sunt vero triangula AFC & CFE æqualia quoniam anguli ad F & latera circa ipsos æquantur, totus igitur sector AFC toti CFE æqualis est, & similiter ostendi potest reliquos HOI, IOK & KOL his esse æquales, qualis igitur submultiplex est AC ipsius ACE talis erit AFC ipsius AFE, quoties vero AC in ipso HIKL continetur toties AFC in ipso HOL continetur, & proinde est ACE ad HIKL ut sector AFE ad sectorem HOL (8). (8) *per def.* 5. l. 5.

Cor. 1. Angulus ad centrum ACE est ad quatuor rectos ut arcus cui insidet ad totam circumferentiam. Fig. 42.

Est enim angulus AFE ad angulum rectum ut arcus cui insidet ad quartam partem circumferentiæ (1), & igitur ad quatuor rectos ut arcus ad totam circumferentiam (2). (1) *per prop.* 30. l. 5. (2) *per prop.*

Cor. 2. Inæqualium circulorum arcus qui angulos subtendunt æquales sunt similes.

Patet enim eos habere eandem rationem ad totas circumferentias (1). (1) *per cor.* 30. l. 5. *præ.*

Cor. 3. Hinc patet arcus quibus similia segmenta continentur esse similes.

1. The first part of the report
2. The second part of the report
3. The third part of the report
4. The fourth part of the report
5. The fifth part of the report
6. The sixth part of the report
7. The seventh part of the report
8. The eighth part of the report
9. The ninth part of the report
10. The tenth part of the report

N O T Æ.

AD DEFINITIONEM PRIMAM. LIB. I.

Quid sint *punctum*, *linea* & *superficies*, ex naturâ solidi seu corporis facillime intelligi potest. Termini enim solidi cujuscvis non sunt partes ejus, & proinde crassitudinem non habent, solæ igitur dimensiones suæ sunt longitudo & latitudo, & ergo sunt *superficies*; harum vero termini solam longitudinem habent, latitudinem enim si habeant essent partes non termini, sunt igitur *lineæ*; quarum termini carent & ipsâ longitudine, nullas igitur habent dimensiones & sunt *puncta*.

AD DEF. 7. LIB. I.

Apud virum eruditum R. Simson diversa est definitio planæ superficiei, scilicet *esse illam in quâ sumptis atcunque duobus punctis, recta linea inter ea, tota jacet in illa superficie*; quæ affectio plani usitatissima est, facile vero deduci potest ex definitione Euclidæ cum definitione lineæ rectæ collatâ, & igitur melius visum est nihil mutare.

AD DEF. 8. LIB. I.

Est hæc in codicibus Græcis definitio 9. ei enim præmittitur generalis quædam definitio anguli, scilicet *esse duarum linearum in plano sese tangentium & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio*, hæc vero omittitur quoniam soli doctrinæ de angulis semicirculi & segmenti (Prop. 16 & 31. lib. 3.) inservit, quæ omnino rejicienda videtur, fructus enim ejus nulli sunt nisi paradoxa inutilia & disputationes geometris omnino indignæ.

Designatur angulus vel unâ literâ ad verticem positâ, vel tribus quarum media est ad verticem, reliquæ duæ alicubi Fig. 2.
Tab. 7.
ad crura.

AD DEF. 9. LIB. I.

Hæc definitio & 10. apud Euclidem non sunt, adduntur vero quoniam termini sæpe occurrunt & explicatione indigent.

AD DEF. 13. LIB. I.

Definitio quæ hanc secuta est, scilicet *terminus est quod alicujus est extremum*, omittitur quoniam inutilis videtur definitiones quoque *segmenti circuli*, & figuræ quæ alterâ parte longior appellatur, omittuntur, quoniam prior inter definitiones libri 3. & posterior inter eas libri 2. invenitur, ubi figura appellatur *rectangulum*; sic quoque *Rhombi* cujus quatuor latera æqualia sunt, non vero anguli; & *Rhomboidis* cujus opposita latera æqualia sunt, non vero adjacentia, quoniam nihil de iis traditur in Elementis; harumque trium posteriorum loco substituitur definitio parallelogrammi.

AD DEF. 17. LIB. I.

Recte omittuntur a R. Simson verba quæ huic definitioni adjungi solent, scilicet *quæ circum bisectionem secant*, utpote corollarium ex definitione, non pars ejus. Id vero demonstrari potest ex congruentiâ partium, si ad invicem applicarentur, patet enim eas congruere ex æqualitate Radiorum. Idem etiam facile ostenditur ex prop. 31. & 24. Lib. 3. ex primâ enim sequitur semicirculos esse segmenta similia, & ex alterâ hæc segmenta esse æqualia.

AD POSTULATUM 3.

Observandum est quod Radius quo describitur circulus, debet esse intervallum inter centrum & aliud punctum, non inter quævis puncta a centro diversa; ut patet ex constructionibus 2. & 3. prop. lib. 1. quæ inutiles forent si concessa sit descriptio circuli ex quovis puncto, cujus Radius cuivis datæ rectæ æqualis est.

AD AX. 11. LIB. I.

Hoc axioma non agit de angulis eidem perpendiculari adjacentibus, qui ex definitione 11. æquales sunt, sed de iis qui a diversis perpendicularibus cum diversis rectis constituuntur. Ejus ope demonstrari potest duas rectas lineas non habere segmentum commune. Flabeant enim si fieri potest duæ rectæ BC & BD segmentum commune AB, & sit BE perpendicularis rectæ ABC, & si perpendicularis quoque est rectæ ABD, erunt anguli CBE & DBE æquales (1), quod absurdum. Si vero non, sit BF perpendicularis rectæ ABD & erunt anguli ABF & ABE æquales (1) quod quoque absurdum. Fig. 3.

Est hoc apud R. Simson cor. ad prop. 11. lib. 1. sed demonstratio ejus mihi non videtur perfecta, per B enim ducit BE perpendicularem ad AB & unicam esse perpendicularem ad istud punctum assumit, hoc vero concedi nequit, quoniam ut erigatur perpendicularis prius producenda est recta AB, & si hæc fieri potest diversis modis, diversæ erunt perpendiculares ad punctum B, ut patet ex constructione prop. 11. lib. 1. & igitur corrumpit tota demonstratio. (1) per an.

AX. 12. LIB. I.

Quamvis communis est omnium sententia rectas ad invicem inclinantes concurrere si producantur, tamen cum dantur lineæ ad invicem continuo accedentes, ut curvæ ad suas asymptotos, quæ nunquam concurrunt, suspectior sit hæc notio quam ut pro geometrico principio ponatur, multi igitur conati sunt theoriam parallelarum sine hoc axioma demonstrare sed infelicitè, a singulis enim assumuntur principia quædam hoc non magis certa; ut iis tamen satisfaciam quibus displicet methodus Euclidis, aliæ afferuntur demonstrationes affectionum parallelarum in N. ad Prop. 27. lib. 1.

Notandum est tria posteriora axiomata a quibusdam editoribus postulatis annumerari; quamvis vero confitendum est ea reliquis omnino diversa esse, & cum ex definitionibus pendent, nomen *notionum communium* vix vindicare posse, editores tamen optimos secutus inter axiomata posui; & si postulata ad problemata referantur, axiomata ad the-

oremata, ut plerique geometræ statuunt, certè inter ipsa rectè ponuntur.

PROP. 1. LIB. I.

Assumit Euclides in constructione hujusce problematis circulos sese interfecare, pro certo habens omnes hoc admittere, fieri enim nequit quin circuli BCD, cujus centrum A est in peripheria circuli ACE, pars extra eum circum sit, & pars intra.

PROP. 2. LIB. I.

Pro diverso situ puncti A, hæc constructio quodammodo mutatur; si enim punctum ponatur in lineâ datâ, non necesse est ducere lineam super quâ describendum est triangulum æquilaterum, & si sit alteruter terminus datæ, evanescit & hæc recta & triangulum super eâ describendum, & ex totâ constructione nil superest nisi circuli ACF descriptio ad cujus peripheriam si ducatur recta erit datæ æqualis; dari quoque potest punctum ita positum ut sit vertex trianguli æquilateri, cujus recta data est basis; quo casu patet ductam ad terminum datæ esse rectam quæsitam; hos casus diversos consulto prætermisit Euclides, Geometris enim ille scripsit non mechanicis, constructionesque suas ad intellectum faciles reddere vult, de praxi minime anxius.

PROP. 3. LIB. I.

In hac propositione ut in præcedenti, positio puncti A constructionem mutat; si sit enim ad terminum datæ sola descriptio circuli, assumptâ datâ pro radio, sufficit; fieri potest quoque ut recta ad A posita datæ CF æqualis cum ipsâ AB coincideret, quo casu circuli descriptio non necessaria est.

PROP. 4. LIB. I.

Forma demonstrationis in hac proportionem apud Euclidem absoluta est, non hypothetica, dicit enim applicato triangulo ABC ipsi EFD, &c. Cum vero tyrones hæc verba

verba fere semper interpretantur applicationem quandam mechanicam significare, melius mihi visum est verbis uti hypotheticis.

PROP. 8. LIB. I.

In hac propositione æqualitas angulorum ad vertices B & F solummodo demonstratur, inde enim, per prop. 4. cæterarum partium æqualitas sequitur, utile vero videtur scholium adjungere ut ex ipsa propositione 8. idem ostendatur.

PROP. 12. LIB. I.

Necesse est ut data sit infinita, aliter problema aliquando foret impossibile, ut patet ex figurâ ad prop. si dentur punctum C & recta finita AE.

PROP. 13. LIB. I.

Dicit Euclides *cum angulos fecerit*, nam ducta ad terminum rectæ ei insitit, sed cum eâ unum tantum angulum facit.

P R O P. 20. LIB. I.

Sunt qui hanc propositionem inter axiomata ponendam esse contendunt, idque sententiam fuisse Archimedis qui assumit rectam lineam esse brevissimam inter duo puncta, hoc vero respicere videtur comparisonem curvarum cum rectis, nunquam enim assumpsisset Archimedes quod demonstraverat Euclides; nec pro axiomatibus ponendæ sunt propositiones omnes quarum per se lucet veritas, sed potius enitendum est ut ex paucissimis principiis omnes deducantur.

Demonstratio hîc allata non Euclidis est, sed alterius cujusdam veteris geometræ.

P R O P. 22. LIB. I.

In hac propositione ut in primâ, assumit Euclides circulos interfecare, id vero facile demonstratur ex conditionibus propositionis, scilicet duas quasvis ex datis majores esse tertiâ, nam quoniam summa radiorum DC & EF

T 2

maiore

major est quam DE, pars utriusque circuli est intra alterum, & quoniam summa radii alterutrius & DE est major altero radio, pars utriusque circuli est extra alterum.

P R O P. 24. LIB. I.

Omissa sunt a Græcis editoribus, in constructione demonstrationi hujusce propositionis præmissâ, verba, *cum latere non majore*, quæ prorsus necessaria sunt ne plures sint casus in demonstratione, rectâ BA aliquando supra, aliquando infra BC cadente, & aliquando cum ipsâ congruente, hæc vero constructione adhibitâ eam semper infra BC cadere Clavius demonstrat, methodoque sequenti, suæ haud absimili ostendi potest.

Fig. 4.

Sit primo latus AC majus latere AB, & cadat si fieri potest recta BG in BC; quoniam igitur latus AC majus est latere AB, erit quoque angulus B major angulo C, sed est angulus AGC major angulo interno B, & ergo erit major ipso C, latus igitur AC erit majus latere AG, sed per hypothesim est ipsi æquale, quod absurdum.

Fig. 5.

Cadat jam BG supra BC, si fieri potest, & producat AG ad E, demonstrarique potest ut supra, rectam AE rectâ AC minorem esse, & ergo AG minorem esse ipsâ AC, sed per hypothesim est ipsi æqualis, quod absurdum.

Si vero latera AB & AC sint æqualia demonstratio prorsus eadem est, nisi quod anguli B & C æquales erunt.

Si vero angulus BAG cum latere majore constituatur, latusque BG in BC caderet, vel infra ipsum, propositio methodo sequenti demonstrari potest.

Fig. 6.

Primo congruant BG & BC, & patet BC majorem esse ipsa BG.

Fig. 7.

Cadat jam BG supra BC, & quoniam rectæ AG & GB simul minores sunt ipsis AC & CB simul, AG vero ipsi AG æqualis est, erit BG ipsa BC minor.

Fig. 8.

(1) per prop.
5. l. 1.

Casus hicce ultimus aliter demonstrari potest, ducta GC & productis AG & AC; quoniam enim anguli EGC & FCG æquales sunt (1), & BGC uno eorum major est, BCG vero altero minor, erit BGC ipso BCG major, et igitur latus BC majus latere BG.

P R O P.

PROP. 26. LIB. I.

Notandum est rectam lateri DE æqualem, abscindi debere ita ut lateri BC contermina sit, aliter enim (scilicet si sumatur ex puncto A) construeretur triangulum cujus relatio triangulo EDF demonstrari nequit; & similiter in casu secundo.

PROP. 27. LIB. I.

Mutatâ definitione parallelarum, & posito axioma quo & ipse Euclides usus est, demonstrari potest hæc propositio cum duabus proximis, & axioma 11. methodo sequente.

Definitio.

Lineæ parallelæ sunt rectæ semper a se invicem æquidistantes.

Axioma.

Pars quævis rectæ finitæ toties sumi potest ut suam totam excedat.

Lemma I.

Si duæ rectæ AB & CD parallelæ sint, recta vero quævis MN uni ipsarum AB perpendicularis sit, erit alteri quoque CD perpendicularis. Fig. 9.

Sumantur enim æquales NA & NB, et erigantur AC & BD perpendiculares ipsi AB, & ducantur AM & BM.

In triangulis ANM & BNM, anguli ad N æquales sunt, & latera NA, NB, quoque æqualia, & NM commune, anguli igitur NMA & NMB æquantur & latera quoque MA & MB, et anguli NAM, NBM ^{(1) per prop. 4. l. 1.}

Desumptis igitur æqualibus angulis NAM, & NBM ab æqualibus NAC, NBD, reliqui anguli MAC & MBD æquales erunt, sunt vero quoque in triangulis MAC et MBD,

MBD, latera MA & AC æqualia lateribus MB & BD,
 (1) *per prop.* sunt igitur anguli AMC et BMD æquales (1), sed æqua-
 4. l. 1. les quoque sunt NMA & NMB, ergo toti NMC &
 (2) *per def.* NMD æquantur & proinde NM ipsi CD perpendicularis
 11. l. 1. est (2).

Lemma II.

Fig. 10. Si duæ rectæ AB & CD perpendiculares sint eidem
 rectæ NM, erunt parallelæ.

(1) *per* Nam si non sint, per M transeat PR parallela ad AB,
 Lem. 1. et erit hæc perpendicularis ad NM (1), et ergo angu-
 lus RMN rectus erit, sed & DMN rectus est, quod ab-
 surdum.

Lemma III.

Fig. 11. Si duæ rectæ AB & CD sint parallelæ, et erigantur
 AC & BD ipsis perpendiculares, erunt partes inter-
 ceptæ æquales.

(1) *per* Nam quoniam rectæ AC & BD sunt perpendiculares
 Lem. 2. eidem rectæ AB, sunt parallelæ (1), et ergo rectæ AB
 (2) *per* & CD sunt æquales (2).
 defin. parall.

PROP. 29. LIB. I. ELEM.

Fig. 12. Recta linea EF rectas parallelas AB, & CD secans
 efficiet angulos alternos æquales, AGH ipsi GHD &
 CHG ipsi HGB; & angulum externum interno opposito
 æqualem EGA ipsi GHC, & EGB ipsi GHD; & quoque
 angulos internos ad easdem partes AGH & CHG,
 BGH & DHG, duobus rectis æquales.

Si secans perpendicularis sit ad parallelas patet propo-
 sitio.

Si vero non, ducantur perpendiculares HK & GL.

(1) *per def.* In triangulis LHG, & KGH, latera LG & HK (1)
 parall. & LH & GK (2) æqualia sunt, & GH commune, ergo
 (2) *per Lem.* anguli LHG & KGH æquantur, et ergo eorum comple-
 3. menta ad duos rectos, anguli scilicet CHG & BGH
 æquantur.

Et quoniam anguli verticales EGA & BGH æquales
 sunt, BGH vero alterno CHG æquatur, erit externus
 EGA

EGA interno GHC æqualis; & similiter demonstrari potest EGB & GHD æquales esse.

Et quoniam anguli CHG & DHG duobus rectis æquales sunt, BGH vero alterno CHG æquatur, erunt DHG & BGH duobus rectis æquales, & similiter demonstrari potest GHG et AGH duobus rectis æquales esse.

PROP. 27. LIB. I. ELEM.

Si recta linea EF secans duas rectas AB & CD, alternos angulos æquales fecerit, AEF ipsi EFD, erunt istæ rectæ parallelæ. Fig. 13.

Nam si recta AB rectæ CD non parallela sit, transeat per E recta XZ ipsi CD parallela, & erunt anguli alterni XEF & EFD æquales, sunt vero AEF & EFD æquales, & ergo XEF & AEF æquales sunt, quod absurdum.

PROP. 28. LIB. I. ELEM.

Si recta linea EF rectas duas AB & CD secans, fecerit angulum externum interno opposito ad easdem partes æqualem, EGA ipsi GHC, vel EGB ipsi GHD, vel interni ad easdem partes, AGH & CHG, vel BGH & DHG duobus rectis æquales, istæ rectæ erunt parallelæ. Fig. 14.

Sint primo EGA & GHC æquales; & quoniam EGA & BGH æquantur, erunt alterni anguli GHC & BGH æquales & ergo rectæ AB & CD parallelæ (1), & similiter si æquales sint EGB & GHD. (1) per præc.

Sint jam AGH & CHG æquales duobus rectis & quoniam AGH & BGH æquantur quoque duobus rectis, erunt anguli alterni CHG & BGH æquales & ergo AB & CD parallelæ, & similiter si sint BGH & DHG æquales duobus rectis.

Lemma 4.

Si recta quævis NP rectam BD secet, secabit rectam quamvis XZ ipsi BD parallelam. Fig. 15.

Sumatur enim punctum quodvis O in rectâ NP, & abscindatur OS ipsi AO æqualis (1), & ducantur OM & SE (1) per prop. 3. l. 1. perpendiculares ad BD, & OC perpendicularis ad SE, & cadet hæc inter S & E, angulus enim ASE acutus est, quoniam AES est rectus (2). (2) per cor. P. 17. l. 1.

In

(3) *per Lem.*
2. In triangulis OMA & SCO quoniam latera AM & OC parallela sunt (3), erunt anguli OAM & SOC æquales, æquantur quoque anguli OMA & SCO, ut et latera AO & OS, ergo latera OM & SC æquantur; sunt vero in triangulis COE, MEO, propter parallelas OM & CE, OC & ME (3), anguli alterni COE & MEO, CEO & MOE, æquales, & latus OE commune est, erunt igitur latera EC & OM æqualia, & cum æquales sunt rectæ OM & SC, erunt EC & SC æquales, & sic continuò sumptis in recta AP partibus ipsi OA æqualibus, demonstrari potest perpendiculares ex terminis harum partium in rectam BD continuo augeri partibus æqualibus, & ergo tandem majores evadere perpendiculari ab XZ in eandem BD, et proinde rectam NP secare ipsam XZ.

AXIOMA 11. LIB. I. ELEM.

Fig. 16.

Si in duas rectas lineas BD & XZ, recta linea NP incidens, angulos internos DNP & ZPN ad easdem partes, duobus rectis minores fecerit, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ, inter se convenient ad eam partem ad quam sunt anguli duobus rectis minores.

(1) *per Lem.*
4. Transeat enim per N recta CE ipsi XZ parallela, & quoniam anguli DNP & ZPN minores sunt duobus rectis, ENP vero & ZPN duobus rectis æquales, erit ENP major ipso DNP, secat igitur BD rectam CE, et ergo rectam XZ ipsi CE parallelam (1); necesse est vero ut ipsam secet ad partes anguli ZPN, si enim secaret ad partes contrarias, rectam NC iterum secaret, quod absurdum.

Constatendum est hanc methodum non posse ab omni nazo vindicari, in ipsa enim definitione assumitur dari rectam a recta in omni puncto æquidistantem, & in demonstrationibus Lem. 2. Prop. 27. & axiom. 11. talem rectam per punctum omne extra quamvis datam transire.

PROP. 30. LIB. I.

Patet duas rectas quæ eidem parallelæ sunt, aliquando jacere in directum.

COR. 5. PROP. 32. LIB. I.

Quoniam ope Prop. 9. singulæ hæ partes bifecari possunt, & sic continuo, patet præter partes 2, 4, 8, &c. in quas solâ prop. 9. dividi potest angulus rectus, etiam dividi posse in 3, 6, 12, 24. & sic in omnes partes quæ numeris ex continuâ multiplicatione ternarii per binarium productis denotantur.

COR. 6. PROP. 32. LIB. I.

Aliter hoc demonstrari potest, ductis scilicet ab angulo quovis B rectis ad reliquos omnes, præter adjacentes, iis enim dividetur figura in tot triangula quot habet latera, duobus demptis, & singuli trianguli anguli duobus rectis æquantur.

PROP. 34. LIB. I.

Ex methodis diversis quibus Clavius datam rectam in partes quotcunque æquales secare docet, unam ex hac propositione pendentem hic afferre operæ pretium videtur.

Ducatur AZ angulum quemcumque cum data AB constituens, et in ipsâ sumantur tot partes AH, HI, IZ in quot dividenda est AB (1) & ducta ZB ducantur IF, & HE ipsi ZB parallelæ (2), erunt partes datæ rectæ, AE, EF & FB æquales. Fig. 17.
(1) per prop. 3. l. 1.
(2) per prop. 31. l. 1.

Ducantur enim IG & HO ipsi AB parallelæ, erunt inter se parallelæ (3) & igitur anguli IHO, ZIG æquales sunt (4), & cum parallelæ sunt ZB & IF erunt anguli IZG & HIO æquales (4), & sunt latera HI & IZ æqualia, et ergo sunt latera HO & IG æqualia (5), sed propter parallelogramma HF & IB, EF & FB ipsis HO & IG æquantur (6), & sunt ergo EF & FB æquales, & sic de reliquis; AE vero ipsi EF æqualis est quoniam anguli IHO & HAE æquales sunt, & quoque HIO & AHE, & latus AH lateri HI æquatur, unde æquantur AE & HO & proinde AE & EF. (3) per prop. 30. l. 1.
(4) per prop. 29. l. 1.
(5) per prop. 26. l. 1.
(6) per prop. 34. l. 1.

Dux quoque sequentes propositiones non prorsus omitte-
tendæ mihi videntur, quamvis vix sunt in usu.

U

Omnis

Fig. 18.

Omnis figura quadrilatera ABCD cujus latera opposita æquantur est parallelogrammum.

Ducatur BD, & in triangulis BAD, DCB, latera AB & AD lateribus DC & CB æqualia sunt, BD vero commune est, sunt igitur anguli ABD & CDB, & quoque ADB & CBD æquales, unde liquet rectas AB & CD, & quoque AD & BC esse parallelas, & igitur ABCD esse parallelogrammum.

Fig. 18.

Omnis figura quadrilatera ABCD cujus anguli oppositi sunt æquales, est parallelogrammum.

Quoniam A ipsi C & B ipsi D æqualis est, erunt A & B simul, ipsis C & D simul æquales, & ergo quatuor A, B, C & D, duorum A & B simul dupli sunt, quatuor vero A, B, C & D æquantur quatuor rectis, & ergo A & B simul duobus rectis æquales sunt, & igitur BC & AD parallelæ sunt, & similiter demonstrari potest AB & DC esse parallelas.

PROP. 35. LIB. I.

Ex tribus casibus quos hæc propositio admittit, & qui inveniuntur in versione Arabica, codices Græci unum tantum retinent eum scilicet qui fig. 53. Tab. 2. respondet, demonstratâ enim æqualitate triangulorum BEA & GFD auferri jubent utrinque triangulum DOE & addi residuis BOC; hæc vero duo triangula in fig. 54 & 55 non inveniuntur.

PROP. 40. LIB. I.

Intelligendum est bases æquales GH & BC esse in directum.

PROP. 44. LIB. I.

Per datam rectam Euclidem intellexisse *positione* datam, & non solum *quantitate*, nemo dubitare potest cui nota est propositio 45. perfici igitur nequit hoc problema producendo latus trianguli ut sit pars producta datæ rectæ æqualis, quæ methodus est quorundam editorum, constructionemque in textu Græco vix crederem esse eam Euclidis, nam post constitutum parallelogrammum dato triangulo æquale, jubet *latus ejus poni in directum cum data*

ta recta, quod quomodo faciendum est omnino nescio, talis enim translatio figurarum de loco in locum non inter postulata invenitur nec alibi ad constructionem problematum adhibetur; videre quoque licet in editione Hervagianâ, figuram ad hanc propositionem in qua præter datum triangulum est & alterum ipsi æquale, parallelogrammo, conjunctum (ut in fig. 19 Tab. 7.). unde conjicere licet partem constructionis Euclidæ e textu excidisse, de illo enim triangulo nihil dicitur; has igitur ob causas Campani methodum in constructione secutus sum.

PROP. 45. LIB. I.

Figura in editione Hervagiana textus Græci ad hanc propositionem quoque attentione digna est, (vid. fig. 20. Tab. 7.) in eâ enim duo sunt triangula parallelogrammo adjacentia quæ triangulis in quæ dividitur datum rectilineum æqualia & similia sunt; hæc mihi videntur (ut in præcedente propositione) indicare constructionem olim diversam fuisse ab eâ quæ nunc exstat, eamque igitur restituere conatus sum.

PROP. 46. LIB. I.

Si constructionem mechanicam respexerat Euclides perpendiculares erexisset ex utroque termino datæ, ipsi æquales, junctisque terminis ipsarum perficeretur quadratum, & hæc methodus multo faciliior foret quam duas ducere parallelas, sed quoniam demonstratio minus clara esset eam rejecit Euclides.

PROP. 47. LIB. I.

Hæc propositio casus est Theorematis universalioris in collectionibus mathematicis Pappi, quod operæ præ-tium est hic adjicere.

Si super lateribus duobus, AB & CB, trianguli ABC, *Fig. 21.* describantur duo parallelogramma AEGB & CLHB, & productis ipsorum lateribus EG & LH quæ lateribus trianguli parallela sunt, donec occurrant in D, describatur super reliquo latere AC parallelogrammum AFIC quod latus habeat parrallelum & æquale rectæ DB jungenti
U 2 istum

istum occursum & verticem anguli sub dictis lateribus, erit hoc æquale duobus prædictis parallelogrammis AEGB & CLHB.

Producatur enim DB ad K, & quoniam parallelogramma FK & FABD sunt super basi eadem AF & in iisdem parallelis AF & KD, erit FK ipsi FABD æquale, & quoniam parallelogramma FABD & EABG sunt super basi eadem AB & in iisdem parallelis AB & ED erit FABD ipsi EABG æquale, æquantur igitur AEGB & FK, & similiter demonstratur æqualia esse IK & CLHB, totum igitur AFIC duobus simul AEGB, & CLHB æquatur.

PROP. 2. LIB. II.

Hujusce propositionis & octo sequentium præter demonstrationes Euclidean alias tradere operæ pretium videtur, quarum tres priores Campani sunt reliquæ Maurolyci.

PROP. 6. LIB. II.

Ope hujusce propositionis demonstrari potest affectio notissima rectarum in arithmetica proportionem, scilicet rectangulum sub extremis una cum quadrato communis differentię æquari quadrato ex media, rectę enim AF, CF & BF æquedifferentes sunt propter AB bisectam, & est CB communi differentię æqualis, quadratum vero ejus cum rectangulo sub extremis AF & BF æquatur quadrato medię CF.

DEF. I. LIB. III.

Hęc non definitio sed theorema est, facile vero demonstratur, congruentibus enim centris, si radii æquales sint, congruent quoque circumferentię, unde & ipsi circuli eorumque circumferentię æquales sunt.

DEF. 10. LIB. III.

Ambiguam esse hanc definitionem ex collatis propositionibus 23. & 26. hujusce libri patet, in priori enim assumitur segmenta similia singulos angulos in uno singulis
in

in altero æquales habere, in posteriori vero, segmenta quæ angulum in uno æqualem angulo in altero habent similia esse assumuntur, sed tollitur hæc ambiguitas per prop. 21. in quâ omnes angulos in segmento æquales esse ostenditur, nec ante istam propositionem de similibus segmentis tractat Euclides. Notandum vero est quamvis hæc segmenta appellantur similia, nihil tamen hoc loco de ipsorum relatione ad suos circulos isto verbo denotari, de proportionem enim nihil ante Lib. 5. traditur, sed cum affectiones talium segmentorum demonstrare voluit Euclides, nomenque impositurus fuit ut periphrases evitaret, placuit ex relatione ad suos circulos ipsa denominare potius quam nomen dare inane.

P R O P. 1. LIB. III.

Tantummodo demonstrat Euclides nullum punctum extra rectas AB & CE esse centrum circuli, cum per se satis manifestum est in ipsis non esse, nisi ubi bisecantur, & ergo non omnino in AB nisi forsan transiret per F, nec in quovis puncto rectæ CE præter ipsum F.

P R O P. 2. LIB. III.

Apud Candallam quem secutus est Tacquet, directæ est demonstratio hujusce propositionis quam Euclides rejecisse videtur quia principium ex quo pendet, scilicet terminum rectæ minoris radio esse intra circulum, inter axiomata sua non invenitur, maluitque indirectâ demonstratione uti quam numerum eorum augere.

P R O P. 7. LIB. III.

Rectam transeunti per centrum propiorem majorem esse remotiore, tantummodo demonstrat Euclides cum sunt ad easdem partes, forsan quia alter casus facile sequitur ex æqualitate rectarum æquedistantium ex utrinque a diametro, melius vero videtur ejus demonstrationem non omittere.

P R O P. 10. LIB. III.

Duæ sunt hujusce propositionis demonstrationes apud Euclidem, in unâ earum, posito quod circuli sese in tribus punctis intersecant, ostendit ipsos habere centrum commune, intersectionem scilicet perpendicularium bisecantium rectas jungentes intersectiones, quod prop. 5. contradiceret. In altera, eodem posito, a centro unius ex circulis ducit rectas ad intersectiones, & cum hæ sunt æquales & ducuntur ad peripheriam alterius circuli a puncto intra ipsam, est istud punctum centrum ejus, similiter contra 5. prop. Quoniam vero applicatio prioris methodi ad casum figuræ 15. satis obscura est, & altera methodus ad eum applicari nequit, cum utriusque circuli centrum est extra alterum, melius visum est diversâ demonstratione uti.

P R O P. 13. LIB. III.

Assumit Euclides in demonstratione hujusce propositionis, rectam transeuntem per centra transire per utrumque contactum si sint duo, quod ope prop. 11. certe demonstrari potest, hic vero minus recte assumitur cum in istâ propositione unicus contactus sit mentio. Videbitur quoque forsitan quibusdam duo esse puncta contactus sibi invicem adjacentia, ad quem casum minus apta est figura ex Euclidis constructione orta, centra enim circulorum ponenda forent prope ad circumferentias, ut recte notat R. Simson; has igitur ob causas melius visum est demonstrationem mutare, non vero in eam quâ Simson (ex Campano) usus est, ei enim licet objicere quatuor forsitan esse puncta contactus; bisecat enim jungentem duo (quæ ponuntur) puncta contactus perpendiculari, dicitque hanc transire per centrum utriusque circuli & ergo per ipsorum contactus: & quidni, si quater contingant, scilicet in terminis subtensæ & terminis diametri? quod impossibile esse non alibi directe ostendit Euclides.

PROP. 15. LIB. III.

Hujusce propositionis est apud R. Simson diversa demonstratio cujus ope facile ostendit partis posterioris conversam esse veram, scilicet rectam quæ major est, centro propiorem esse. Quadrata enim perpendicularium CF & CP sunt complementa quadratorum ex FA & PD dimidiis inscriptarum, ad quadratum radii CA vel CD, ergo prout quadrata ex dimidiis majora sunt, quadrata perpendicularium, & igitur ipsæ, perpendiculares minora erunt, & e contra.

PROP. 16. LIB. III.

Omissa est pars posterior hujusce propositionis, scilicet angulum inter diametrum & peripheriam esse quovis rectilineo angulo acuto major, illum vero inter peripheriam & contingentem, quovis minor, quoniam prorsus inutilis est, agiturque de comparatione quantitatum quas homogeneas esse forsitan non omnes agnoscunt.

SCHOL. 2. PROP. 16. LIB. III.

Hoc necessarium videtur ad prop. 34. huj. lib. ne suspicaretur si angulus V sit quam minimus, rectam angulum ipsi æqualem cum contingente efficientem, totam extra circulum esse.

PROP. 20. LIB. III.

In demonstratione hujusce propositionis, ut nunc exstat in textu Græco, duo assumuntur principia, scilicet *si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint duplæ, singulæ singularum, erit quoque aggregatum ex illis, aggregati ex his duplum, & si totum totius sit duplum, & ablatum ablati, erit quoque reliquum reliqui duplum; & hoc jure assumpsisse Euclidem asserit Clavius quoniam in 1. & 5. prop. lib. 5. quæ ab hac non pendent, demonstratur generale theorema cujus hæc principia casus sunt particulares, eaque hîc pro axiomatibus sumi propter simplicitatem: melius vero mihi visum est veterem formam*

formam demonstrationis aliquantum mutare quam tali defensione uti. Propositioni, qualis nunc est, nihil ut spero obijci potest, cum enim summa partium totæ æqualis est, & magnitudines quæ duplæ sunt æqualium, ipsæ æquantur, recte ponitur summam quantitatum quæ duplæ sunt partium, duplam esse totius, & e contra: quibus vero hæc methodus non placet propositionem, cum Clavio, sic demonstrare possunt.

Fig. 22.

Si cadat angulus ad centrum intra augulum ad peripheriam, ducatur per vertices earum recta BE. Anguli CAB & CBA æquantur (1) ut & CBD, CDB (1). Anguli igitur CAB & CDB simul, æquantur angulo ABD (2), ergo summa trium CAB, ABD & CDB dupla est ipsius ABD. Angulus vero ACE æqualis est angulis CAB & CBA (3), & angulus ECD æqualis est angulis CDB & CBD (3), & proinde totus ACD æquatur summæ angulorum CAB, ABD & CDB, sed summa horum dupla est anguli ABD, & ergo angulus ACD duplus est ipsius ABD.

Fig. 23.

Si vero crus alterum CD anguli ad centrum secetur crure BA anguli ad peripheriam, ducatur CB, & quoniam anguli CBD, CDB æquales sunt (4), & CBD major est angulo EBD, erit CDB major ipso EBD, constituatur igitur ad punctum D & cum recta DB angulus BDF æqualis angulo EBD (5), & desumptis his æqualibus ab æqualibus CDB, CBD erunt reliqui anguli CDF & CBF æquales; sed CBF & CAB æquales sunt (6), ergo CDF æqualis est ipsi CAB; sed æquantur verticales CEA & DEF (7) ergo reliquus angulus ACE in triangulo AEC æqualis est reliquo angulo EFD in triangulo DFE (8), angulus vero EFD æquatur duobus simul FBD & FDB (9) qui ipsi sunt æquales (6), proinde EFD duplus est ipsius ABD, & ergo ACD, ipsi EFD æqualis, duplus est ipsius ABD.

P R O P. 25. LIB. III.

Hac methodo inveniendi centrum circuli Euclides alibi usus est, substituitur igitur loco constructionis prolixæ quam ad hoc problema adhibet.

PROP. 26. LIB. III.

Pars secunda propositionis, scilicet, cum angulus non est acutus, aliter demonstratur ab Euclide, tantummodo enim dicit, *desumptis æqualibus ABC & DEF a circulis totis æqualibus, arcus residui AC & DF æquales erunt.* Sed si datus angulus sit rectus, hæc demonstratio non valet, quoniam angulus oppositus est rectus, & demonstratio partis prioris angulo recto non applicari potest.

PROP. 31. LIB. III.

Enunciationi hujus propositionis additur in textu Græco, *& majoris segmenti angulus recto major est; minoris vero segmenti angulus recto minor.* Hanc vero partem omisi ob rationes allatas in N. ad Prop. 16. lib. 3. nec credere possum has partes omissas Prop. 16. & 31. ab Euclide unquam scriptas fuisse, principia enim ex quibus pendet demonstratio posterioris omnino evertunt demonstrationem prioris, ut cuivis rem perpendenti liquet.

PROP. 33. LIB. III.

Casus secundi diversa est constructio in textu Græco, bisecta scilicet AB & ad punctum bisectionis erectâ perpendiculari, demonstratio vero in ista methodo prolixior est. Rectas AO & BO concurrere patet ab ax. 12, uterque enim angulus OAB & OBA recto minor est.

AD DEFINITIONES LIB. IV.

OMittuntur duæ definitiones huic libro in codicibus Græcis præmissæ, scilicet figura rectilineæ in figura rectilinea inscriptæ, & circa figuram rectilineam circumscriptæ, utpote inutiles, de tali enim inscriptione & circumscriptione nihil traditur ab Euclide.

Recte ad has definitiones notat R. Simson verba *tangere & contingere* non idem sonare; *tangere* enim dicitur recta linea rectam vel circulum cum ita occurrit ut non secet, quamvis producta secaret, & sic angulus dicitur tangere rectam lineam vel circulum cum verticem suam

in ipsis habet : *contingere* vero dicitur recta circum, cum ita tangit ut producta non secet.

PROP. 3. LIB. IV.

Contingentes ML & MN ipsi LN occurrunt ; patet enim si ducantur AB & AC angulos versus L & N duobus rectis minores esse ; & quoniam duo anguli ad D cum duobus ad F quatuor rectis æquales sunt, interni vero EDF & EFD duobus rectis minores, erunt EDG & EFH duobus rectis majores, & igitur desumptis AKB & AKC, ipsis EDG & EFH æqualibus, ab angulis ad K qui simul quatuor rectis æquantur, patet rectas KB & KC angulum constituere ad partes M & ergo si ducatur BC, erunt anguli inter ipsam & contingentes versus M duobus rectis minores, & igitur concurrunt contingentes ad istas partes.

PROP. 4 & 5. LIB. IV.

Patet rectas bisecantes angulos trianguli, in prop. 4. concurrere, ex axioma 11. & ex eodem axioma, ducta DE patet, in prop. 5. perpendiculares DF & EF concurrere.

PROP. 6. LIB. IV.

Figuram inscriptam æquilateram esse demonstrat Euclides ope prop. 4. lib. 1. unde liquet triangulorum AEB & AED bases AB & AD æquales esse & sic de reliquis ; demonstratio vero ex æqualitate arcuum melior videtur.

PROP. 7. LIB. IV.

Hæc propositio ut in codicibus Græcis nunc exstat vitiata est, demonstrationi enim inseritur *parallelogrammum esse FH* & igitur *FG* & *KH*, & quoque *FK* & *GH* æquales esse, quod prorsus inutile, quoniam pergit demonstratio ostendere utramque *FG* & *KH* ipsi *AC*, utramque vero *FK* & *GH* ipsi *BD* æquales esse, unde sequitur quatuor *FG*, *GH*, *HK* & *KF* æquales esse. Simile quoque viti-
tium

tium insequenti propositioni inest, cui inferitur *GD*, *BK*, *GA*, *AH*, & *AD* esse parallelogramma, quod ad conclusionem non necessarium est.

P R O P. 11. LIB. IV.

Concessis anguli in partes quotcunque æquales sectione, descriptioneque trianguli isoscelis cujus anguli ad basem sint multiplices qualescunque anguli verticalis, circulo inscribi potest hæc methodo figura quæcunque laterum imparium, & si anguli ad basem multiplices sesquialteri sunt anguli verticalis, figuræ quoque parium laterum possunt inscribi; si enim numerus laterum figuræ, ablatâ unitate, per binarium dividatur, constituaturque triangulum isosceles cujus anguli ad basem sunt ad verticalem ut quotus ad unitatem, ejus ope inscribi potest figura quæfita. Ut si heptagonum inscribendum sit, angulus ad basem trianguli debet ad verticalem esse ut 3 ad 1.

COR. 5. P R O P. 15. LIB. IV.

Hinc patet latus trianguli æquilateri incommensurabile esse ad diametrum circuli in quo inscribitur, est enim ad ipsam ut radix quadratica ternarii ad binarium.

P R O P. 16. LIB. IV.

Circuli circumferentia quæ per hanc propositionem in quindecim partes dividi potest, partibus istis bisectis (1), (1) *per prop.* in triginta dividitur, & ita deinceps in 60. 120, &c. 30. 4. 3. Similiter bisectis singulis ex quatuor partibus quæ per prop. 6. huj. lib. inveniuntur, circulus in partes octo dividitur & ita in 16. 32, &c. Et sic quoque, per prop. 15. in 3. 6. 12, &c. Et per prop. 11. in 5. 10. 20. &c. Methodus vero geometrica circulum in partes septem, undecim, aut alias quasvis a supra memoratis diversas secandi adhuc desideratur.

Est vero Procli celebre theorema de affectione quâdam polygonorum ordinatorum quod hoc loco prætermitti non debet, scilicet tria tantum ex iis ita ad punctum componi posse ut superficiem continuam constituent, ad hoc enim necessarium est angulum polygoni partem esse aliquam

quotam quatuor angulorum rectorum, tot enim rectis æquantur anguli circa punctum; quoniam igitur trianguli æquilateri angulus sexta pars est quatuor rectorum, quadrati vero angulus quarta pars est & hexagoni pars tertia, patet sex triangula æquilatera, quatuor quadrata vel tria hexagona continuam superficiem constituere posse, ad punctum composita; pentagoni vero angulus quartâ parte quatuor rectorum major est, tertiâ vero minor, & reliqui cujufvis polygoni angulus tertiâ parte quatuor rectorum major est, unde patet ipsa circa punctum componi non posse,

DEF. 4. LIB. V.

Hâc definitione determinat Euclides quales magnitudines ipse homogeneas esse agnoscit, vulgo enim quædam tales esse existimantur quas heterogeneis ille annumerat, quales sunt lineæ finita & infinita.

DEF. 5. LIB. V.

Quomodo definiri debent magnitudines proportionales, seu quæ in eâdem ratione sunt, usque ad hunc diem inter Geometras disceptatur; Euclidis definitio hujusmodi est, " In eâdem ratione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam ut tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiplices, secundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque vel unâ superant, vel æquales sunt, vel unâ deficiunt inter se comparatæ." Contra hanc vero disputatur, omnes quodammodo intelligere quid sit duas rationes æquales vel similes vel *easdem* (ut Euclides eas appellat) esse, & inter hanc notionem definitionemque ne minimam esse similitudinem; agnoscitur quidem Euclidem demonstrasse magnitudines quibus hæc pertinet affectio utcumque invertantur, alternentur, variisve modis quibus usi sunt Geometræ mutantur, eam semper retinere, est vero & ultra hoc quod desideratur, ut scilicet ostendatur nexus inter hanc definitionem & istam relationem duarum rationum quæ vulgo æqualitatis nomine designatur. Contra hanc objectionem optime disputat Barrovius in Lect. Math. everfisque variis de proportionem theoriis quas post

post Euclidem excogitati sunt Geometræ, finem toti controverſiæ imponere, omneſque conatus novæ condendæ theoriæ reprimere enititur his verbis, “ Per has naturas “ (*ſcilicet magnitudinum proportionalium*) nihil aliud intel- “ ligi quam rei definitæ nomini, quatenus in uſu com- “ muni verſatur, respondentes conceptus aut ſignificatus “ aliquos imperfectos & indiſtinctos in ſcientiis minimè “ reſpiciendos, ad quos proinde nullatenus exigendæ ſunt “ definitiones, imo ſecludendis & eliminandis iis, ipſo- “ rumque loco ſubſtituendis rerum certis diſtinctis atque “ clariſ ideis efformantur definitiones.” Hoc conſeſſo Euclidis definitio certè optima eſt, a vulgari notione enim prorfus eſt aliena ; patet vero ex Elementis Euclidem ad talem regulam definitiones ſuas nunquam conformaſſe, ipſeque Barroviuſ (in Lect. 6. ann. 1664) agnoſcit “ Quod “ expediat a facilioribus magiſque familiaribus paſſionibus “ argumentandi initium ſumere, ſeu ſubjectum definire.” His igitur verbis conceditur ſi ſit definitio proportionis Euclideæ magiſ familiaris, eam eſſe anteponendam, ſi quidem ex ipſa affectiones quæ in uſu ſunt demonſtrari poſſunt ; talem vero definitionem eam quæ nunc adhibetur eſſe forſan plerique agnoſcent, a vulgari enim notione deſumpta eſt ipſa accurata, eaque poſitæ affectiones omnes proportionalium, inter quas ipſius Euclidis definitio eſt, demonſtrantur.

DEF. 7. LIB. V.

Definitio cujuſ loco hæc ſubſtituitur huiuſmodi eſt, “ Quando autem æque multiplicium, multiplex quidem “ primæ ſuperaverit multiplicem ſecundæ, multiplex au- “ tem tertię non ſuperaverit multiplicem quartæ, tunc pri- “ ma ad ſecundam majorem rationem habere dicitur quam “ tertia ad quartam, & contra, tertia ad quartam minorem “ rationem habere dicitur quam prima ad ſecun- “ dam.”

DEF. 12. LIB. V.

Definitio rationis compoſitæ vulgo inter def. lib. 6. ponitur, eam vero vitiatam eſſe optime oſtendit R. Simſon qui ad veterem locum veramque formam eam reſtituit, finemque

finemque in quem introducta fuit in Geometriam ita explicat, " Usus autem rationis compositæ in hoc unice
 " consistit, quod ejus ope periphrases evitentur, & ita
 " propositiones possint vel enuntiari vel demonstrari bre-
 " vius, vel utrumque fieri possit. Ex. gr. si propositio
 " 23. lib. 6. enuntianda esset, non facta rationis compo-
 " sitæ mentione, ita fieret; Si duo parallelogramma
 " æquiangula fuerint, & fiat ut latus primi ad latus se-
 " cundi, ita quævis recta assumpta ad secundam rectam;
 " ut vero latus reliquum primi ad latus reliquum secundi,
 " ita fiat secunda recta ad tertiam; erit parallelogram-
 " mum primum ad secundum, ut prima recta ad tertiam
 " rectam. Veteres autem cum vidissent hanc enuntiatio-
 " nem posse breviorē reddi, si nomen impositum esset
 " rationi quam habet prima recta ad ultimam, quo no-
 " mine simul indicarentur rationes intermediæ, primæ
 " scilicet ad secundam, & secundæ ad tertiam rectam, &
 " ita deinceps si plures fuerint rectæ; rationem hanc
 " primæ ad ultimam dixerunt rationem compositam ex
 " rationibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam
 " rectam, hoc est, in præsentī casu, ex rationibus quæ
 " eadem sunt rationibus laterum, atque ita brevius pro-
 " positionem enuntiaverunt."

DEF. 14. LIB. V.

Hæ variz mutationes magnitudinum proportionalium
 ope tabulæ sequentis facilius intelliguntur.

Sit	-	A : B : : C : D.	Erit
Permutando	-	A : C : : B : D.	
Invertendo	-	B : A : : D : C.	
Componendo	-	A + B : B : : C + D : D	
Dividendo	-	A - B : B : : C - D : D	
Convertendo	-	A : A + B : : C : C + D	
	Vel	A : A - B : : C : C - D	
Et si sit	-	A : B : : D : E	
	&	B : C : : E : F.	Erit
Ex æquo ordinatè	-	A : C : : D : F.	
Et si sit	-	A : B : : E : F.	
	&	B : C : : D : E.	Erit
Ex æquo perturbatè	-	A : C : : D : F.	

AX.

AX. I. LIB. V.

De submultiplicibus apud Euclidem nulla fit mentio, patet vero affectiones multiplicium quas ille inter axiomata posuit submultiplicibus quoque pertinere.

PROP. I. LIB. V.

Quamvis & hæc propositio & aliæ quædam in hoc libro pro axiomatibus sumi possunt, melius tamen visum est eas demonstrare quam numerum axiomatum augere.

COR. I. PROP. 7. LIB. V.

Vox *continetur* ambigua est, magnitudo enim quæ in aliâ continetur vel submultiplicem ejus esse potest, vel non, & ex hac ambiguitate oritur plurium propositionum in hoc libro difficultas.

PROP. 32. LIB. V.

Hæc propositio apud Euclidem definitio est magnitudinum proportionalium.

DEF. 4. LIB. VI.

Adduntur hæc & duæ sequentes definitiones utpote ad propositiones 27, 28 & 29, intelligendas necessariæ.

PROP. I. LIB. VI.

Euclides hanc propositionem aliter demonstrat, ex suâ scilicet definitione magnitudinum proportionalium.

PROP.

PROP. 3. LIB. VI.

Fig. 24.

Si latere BA producto, angulus externus CAF bisece-
tur, rectaque ipsum biseicans occurrat basi, similiter
ostendi potest basis segmenta lateribus reliquis esse propor-
tionalia, & vicissim; & mihi videtur propositionem olim
ita enuntiatam fuisse ut casum utrumque complectat, ad
hunc modum enim nunc incipit, " Si recta bifariam se-
cans angulum trianguli secet & basem," fieri vero nequit
quin secans angulum internum, latus oppositum quoque
secaret, absolute igitur hoc posuisset Euclides, nec formæ
hujus hypotheticæ alia assignari potest ratio nisi eam res-
pexisse bisectionem anguli externi, qui aliquando talis est
ut rectam ipsum biseicans basi erit parallela, scilicet cum
ille angulus duplus est anguli interni remoti, ut fit in tri-
angulo isoscele.

PROP. 6. LIB. VI.

In hac propositione, ut & præcedente, constructio quæ
apud Euclidem definita est, indefinite exprimitur, ne sus-
picaretur unicum esse latus cui applicari debent triangula
quorum ope similitudo datorum demonstratur; dicit enim
ille, " Constituatur ad latus DF, &c." quasi ad alterum
ipsum constituere non liceat.

PROP. 11. LIB. VI.

Fig. 25.

Si data sit ratio minoris inæqualitatis LO ad LR, conti-
nuari potest donec ad magnitudinem quavis datâ majorem
pervenietur.

(1) per P.
23. l. 5.

Sint enim LO, LR, LQ & LI continuè proportionales,
& quoniam est LO ad LR ut LR ad LQ, erit dividendo
LO ad OR ut LR ad RQ, est vero LR major ipsâ LO,
& proinde RQ ipsâ OR est major (1), similiterque
ostendi potest IQ ipsâ QR majorem esse, quoniam igitur
primæ LO adduntur magnitudines continuè crescentes
pervenietur tandem ad quavis datâ majorem.

Si

Si vero data fit ratio majoris inæqualitatis AB ad CB, *Fig. 26.* pervenietur tandem ad magnitudinem quâvis datâ minorem.

Sumatur enim magnitudo quævis OL, & ut CB ad AB ita fiat LO ad LR, & ita deinceps donec perveniatur ad IL ipsâ AB majorem, & per tot terminos continuetur ratio ipsius AB ad CB & fit terminus ultimus FB.

Quoniam igitur duæ sunt series magnitudinum proportionalium & numero æqualium, erit ex æquo, AB ad FB ut IL ad OL, est vero AB ipsâ IL minor (1), & proinde (1) *per const.* FE ipsâ OL minor est (2), similiterque ad magnitudinem (2) *per prop.* aliâ quâvis datâ minorem perveniri potest. 23. l. 5.

His præmissis, seriem rectarum in quâvis datâ ratione majoris inæqualitatis invenire, summamque seriei per terminos infinitos continuatæ exhibere docet Tacquet ex Gregorio a S. Vincentio, ad hunc modum.

Sumptis in rectâ quâvis AZ, partibus AB & BC terminis datæ rationis æqualibus, ducantur AL & BO ipsi AZ *Fig. 27.* perpendiculares ipsisque AB & BC æquales, ductâque LO ipsi AZ occurrente in Z, per C ducatur CQ ipsi AZ perpendicularis, eritque tertia proportionalis ipsis AB & BC, sumptâque CE ipsi CQ æqualis erit perpendicularis ER quarta proportionalis & ita deinceps, estque AZ summæ seriei, si per terminos numero infinitos continuetur, æqualis.

Pars. I. Est AZ ad BZ ut AL ad BO (1), seu ut AB ad BC (2), & igitur permutando, AZ est ad AB ut (1) *per sch.* BZ ad BC, & convertendo AZ ad BZ ut BZ ad CZ, (2) *P. 4. l. 6.* est vero AZ ad BZ ut AL ad BO (1), & BZ ad CZ ut BO ad CQ (1) & proinde est AL ad BO ut BO ad CQ (3), & similiter ostendi potest reliquas perpendiculares (3) *per prop.* esse proportionales. 18. l. 5.

Pars. II. Quoniam est AL ad BO ut AZ ad BZ, AL vero ipsâ AZ minor est, erit quoque BO ipsâ BZ minor (4), & similiter CQ, ER, FS, &c. ipsis CZ, EZ, FZ, &c. minores sunt, tota igitur series proportionalium (4) *per prop.* ipsâ AZ non major est; & quoniam AZ, BZ, CZ, &c. 23. l. 5. continuè proportionales sunt, erit terminus ultimus datâ quâvis magnitudine minor, & proinde summa ipsarum AB, BC, CE, &c. seu tota series proportionalium ipsâ AZ non minor.

PROP. 13. LIB. VI.

Ad duas medias proportionales inter datas rectas inveniendas, excogitatæ sunt a Platone, Philone Byzantino & Cartesio methodi sequentes quæ quamvis non sunt geometricæ prætermitti non debent.

Methodus Platonis.

Fig. 28.

Lateri normæ inferatur regula ipsi perpendicularis mobilisque secundum ejus longitudinem, & positis rectis datis AB & BC ita ut angulum rectum constituent, producantur ad Z & X, & ita ad BX applicetur angulus normæ ut latere ejus per A transeunte, regula vero per C, vertex anguli inter latus reliquum & regulam sit alicubi in recta BZ, & tunc erunt BD & BE mediæ proportionales quæsitæ.

In triangulo rectangulo enim ADE, ducta est ab angulo recto DB perpendicularis in latus oppositum, & proinde AB est ad DB ut DB ad BE (1), & similiter est DB ad BE ut BE ad BC.

(1) per cor.
prop. 8. l. 6.

Methodus Philonis.

Fig. 29.

Datæ AB & BC ita ponantur ut rectum angulum constituent, completoque rectangulo BADC circum ipsum circulus circumscribatur, productisque DC & DA ita inter ipsas applicetur regula FG ut partes FO & BG sint æquales, erunt AF & CG mediæ proportionales quæsitæ.

Quoniam enim GB ipsi FO æqualis est (1), erit quoque GO ipsi BF æqualis & proinde rectangulum sub OG & GB rectangulo sub BF & FO æquatur, sed æquale est rectangulum sub OG & GB rectangulo sub DG & GC (2), & rectangulum sub BF & FO rectangulo sub DF & FA (2), & ergo rectangulum sub DG & GC rectangulo sub DF & FA æquale est, & igitur est DG ad DF ut FA ad GC (3), est vero propter parallelas GD & BA, GD ad DF ut BA ad AF (4), & propter parallelas DF & CB, est GD ad DF ut GC ad CB (4), & proinde est BA ad AF ut AF ad GC, & AF ad GC ut GC ad CB (5).

(5) per prop.
18. l. 5.

Methodus

Methodus Cartesii.

Sint duæ regulæ AZ & AX circa punctum A rotantes, *Fig. 30.* iisque alternè inferantur regulæ BC, CD, DE, &c. ita ut regulis quibus inferuntur perpendiculares sint, iisque apertis sese impellant, & sint datæ rectæ AB & AE, primâque perpendiculari BC ad B applicatâ ita aperiantur regulæ ut tertia DE per E transeat, eruntque AC & AD mediæ proportionales quæsitæ.

Quoniam enim in triangulo ACD angulus ACD rectus est, ab ipso vero in latus oppositum cadit perpendicularis CB, est AB ad AC ut AC ad AD (1), similiter in tri- ^{(1) per cor.} angulo rectangulo ADE, est AC ad AD ut AD ad AE, *p. 8. l. 6.* & proinde AC & AD sunt mediæ proportionales inter datas AB & AE.

Si quatuor mediæ proportionales inveniendæ sunt, aperiantur regulæ ita ut FG quinta perpendicularis per E transeat, & similiter si sex, octo, &c.

Si vero numerus mediarum sit impar, datæ AB & AE *Fig. 31.* ad eandem regulam applicari debent, ut patet ex *fig. 31.* ubi inter AB & AE tres sunt mediæ, scilicet AC, AD, & AF.

COR. 1. PROP. 20. LIB. VI.

Ut duo polygonâ sint in duplicatâ ratione primæ datæ ad secundam, necessarium est ut hæ rectæ sint inter angulos æquales, & ergo ut polygonâ ex iis similiter describantur. Super datâ enim rectâ tot constitui possunt polygonâ diversarum magnitudinum quæ dato polygono similia sunt, quot latera sunt in dato diversarum longitudinum; detur enim quadrilaterum cujus latera numeris 1. 2. 4 & 6. sunt proportionalia, & sit aliud describendum huic simile super rectâ lateri maximo æquali, si ita constituatur ut anguli huic rectæ adjacentes æquales sint iis quæ lateri ipsi æquali adjacent, erunt polygonâ æqualia; si vero ita ut æquales sint angulis quæ lateribus per 4. vel 2. vel 1. denotatis adjacent, erunt polygonâ ad invicem ut 36 ad 16, vel ut 36 ad 4 vel ut 36 ad 1.

PROP. 22. LIB. VI.

Ad demonstrationem partis secundæ hujusce propositionis assumit Euclides rectas super quibus constituuntur æqualia polygona quæ similia sunt, similiterque descripta, æquales esse, melius vero visum est demonstrare in lib. 5. rationes quæ subduplicatæ sunt æqualium esse ipsas æquales, unde utriusque partis demonstratio similis est.

PROP. 23. LIB. VI.

Hæc demonstratio a Candalla desumpta est, Euclides enim assumit rectas ad latera parallelogrammorum proportionales, ut fit in scholio hujus propositionis, quod ad propositionem demonstrandam non videtur necessarium.

PROP. 27. LIB. VI.

Fig. 32.

Ex hac propositione deducitur solutio problematis quod extra limites geometriæ Elementaris esse videtur, scilicet maximum invenire parallelogrammum quod in dato triangulo potest inscribi. Quoniam enim defectus parallelogrammorum AI, AG, &c. similes sunt parallelogrammo EF, singulum ipsorum unum angulum in rectâ BZ habebit, & proinde in triangulo AZB inscribuntur, ex iis vero maximum est AG super basi dimidiâ AE descriptum & igitur cujus latera reliqua trianguli latera AZ & BZ bisecant.

PROP. 32. LIB. VI.

Fig. 33.

Verba, & ut latera non homologa angulum ad quem componuntur constituent, adduntur enunciationi hujusce propositionis quæ aliter non esset vera; rectè enim notat Candalla ex conditionibus in textu Græco conclusionem non sequi, ut patet ex fig. 33. in quâ latera homologa AB & DC, BC & CE sunt parallela, reliqua vero latera non sunt in directum, ad hoc enim necessarium est ut anguli sub lateribus proportionalibus communem habeant alternum,

num, ut æqualitas eorum, quæ ad demonstrationem necessaria est, ostendatur. Observandum vero est hanc propositionem duas condiciones continere, dantur enim triangula quæ duo latera duobus proportionalia habent & tamen ita componi non possunt ut ista latera sint parallela, ad hoc enim necessarium est angulos inter ipsa esse æquales.

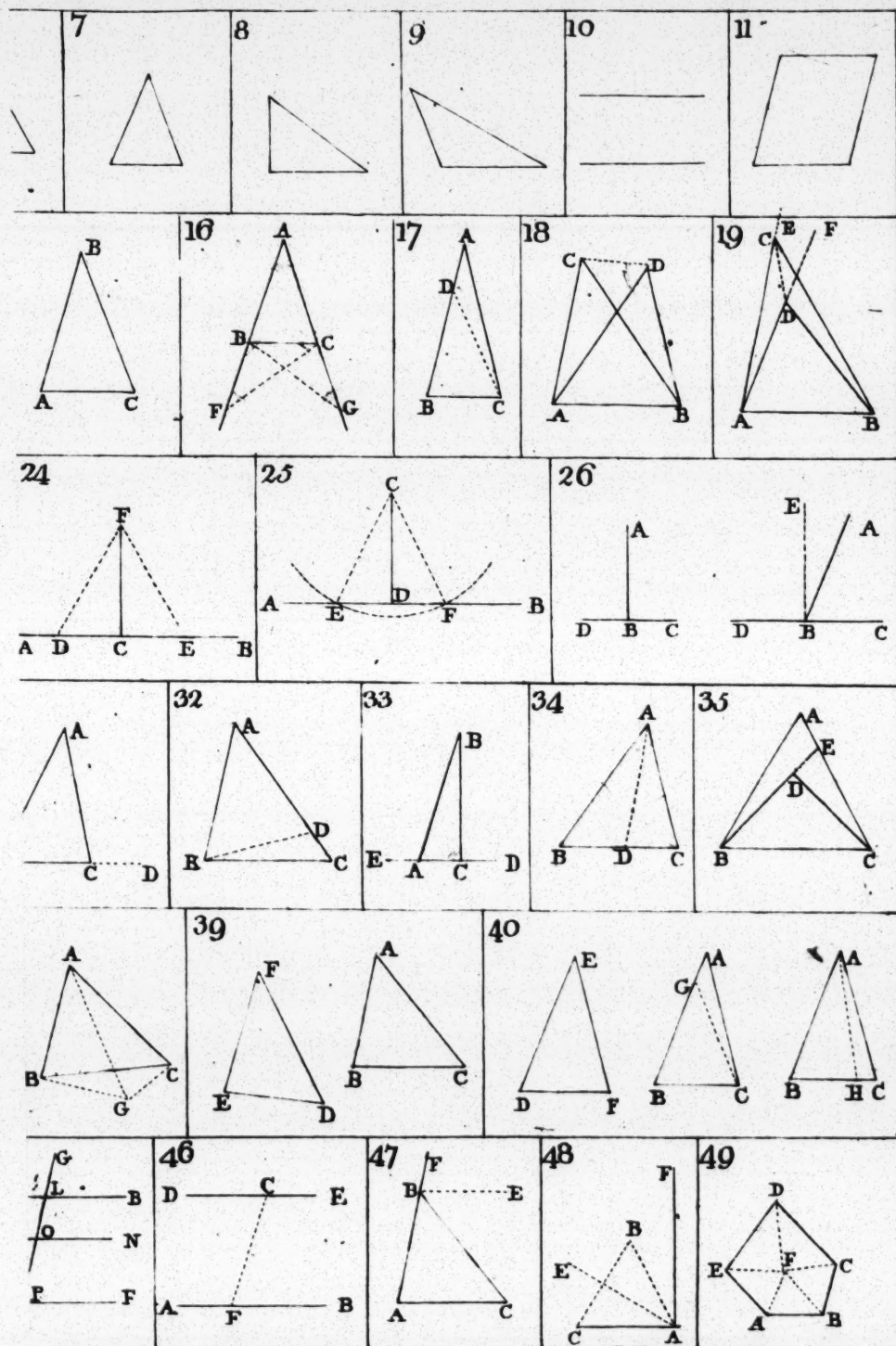
PROP. 33. LIB. VI.

Hanc propositionem aliter demonstrat Euclides, ex suâ definitione proportionis, sumptis scilicet æque multiplicibus angulorum. Hæc methodus vero multis difficultatibus obnoxia est, dari enim possunt anguli recti vel obtusi quorum proinde multiplices anguli non sunt, secundum Euclidis definitionem; & si in fig. 34. dentur anguli ACB & ACD, quorum alter semirectus alter vero rectus est, ita multiplicari possunt, (quater scilicet) ut prior in rectam AG migret, posterior in rectam CA. Estque hæc una causa definitionis 5. lib. 5. mutandæ.

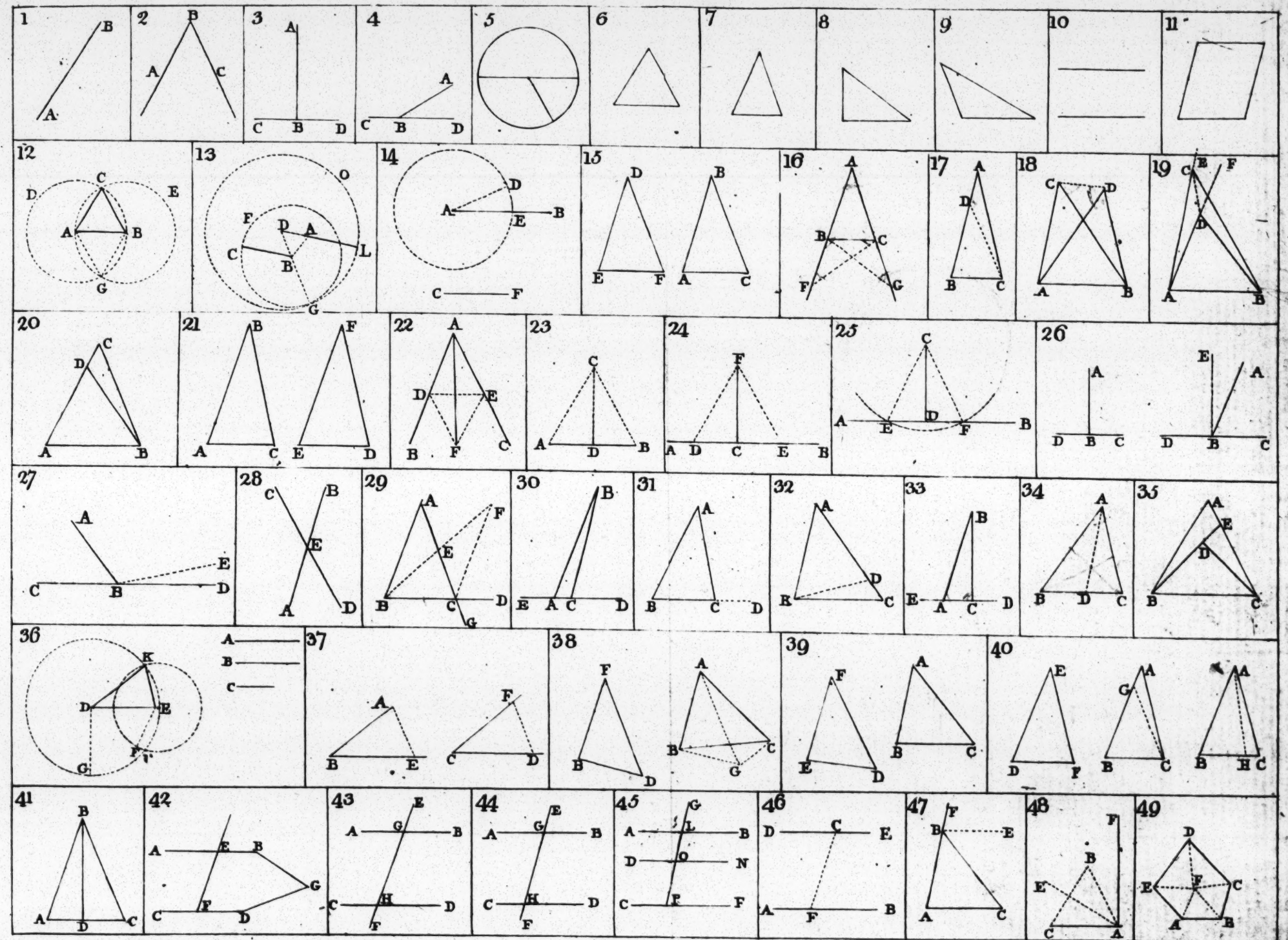
F I N I S.



PRIMA



TABULA PRIMA

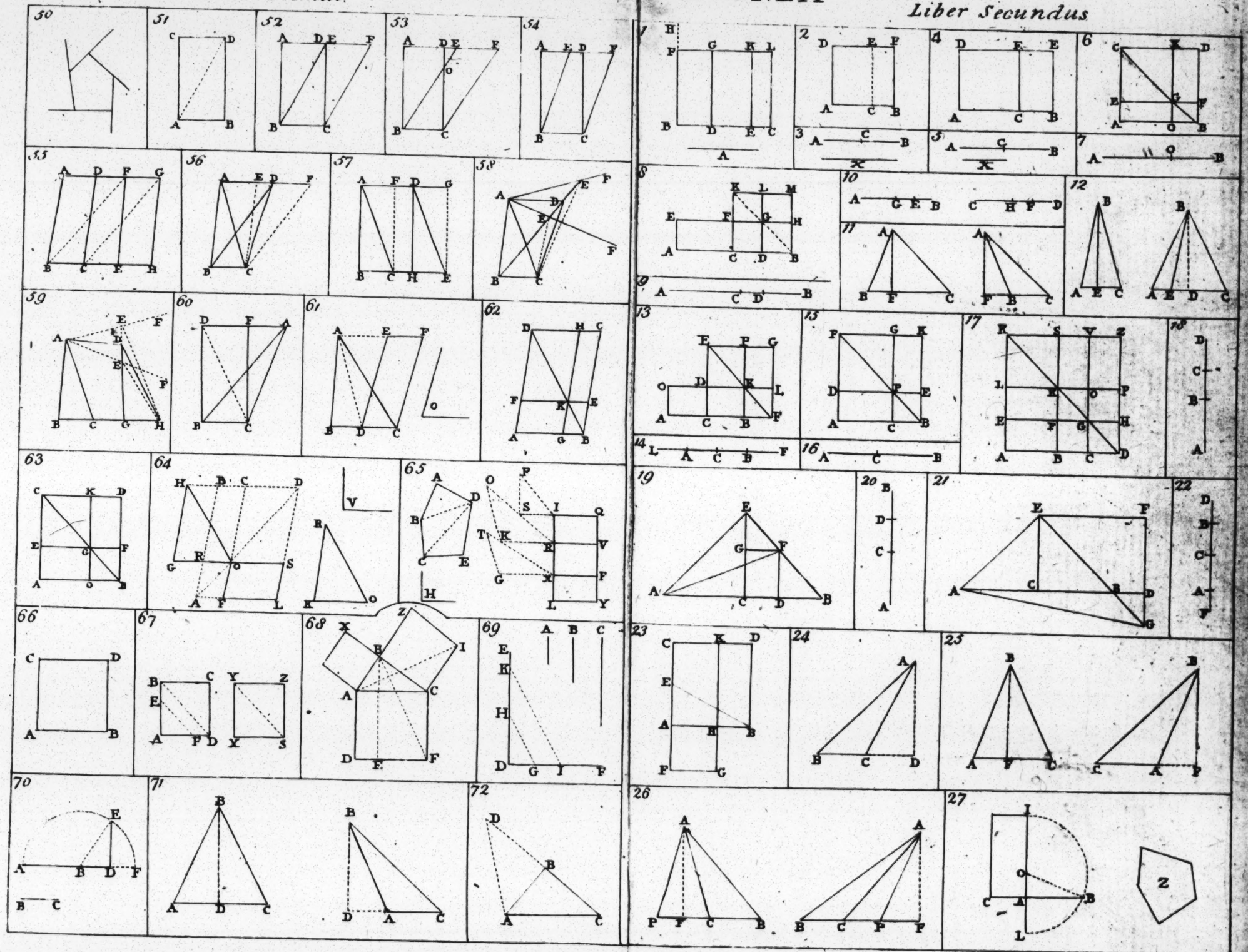


Liber Primus

TABULA

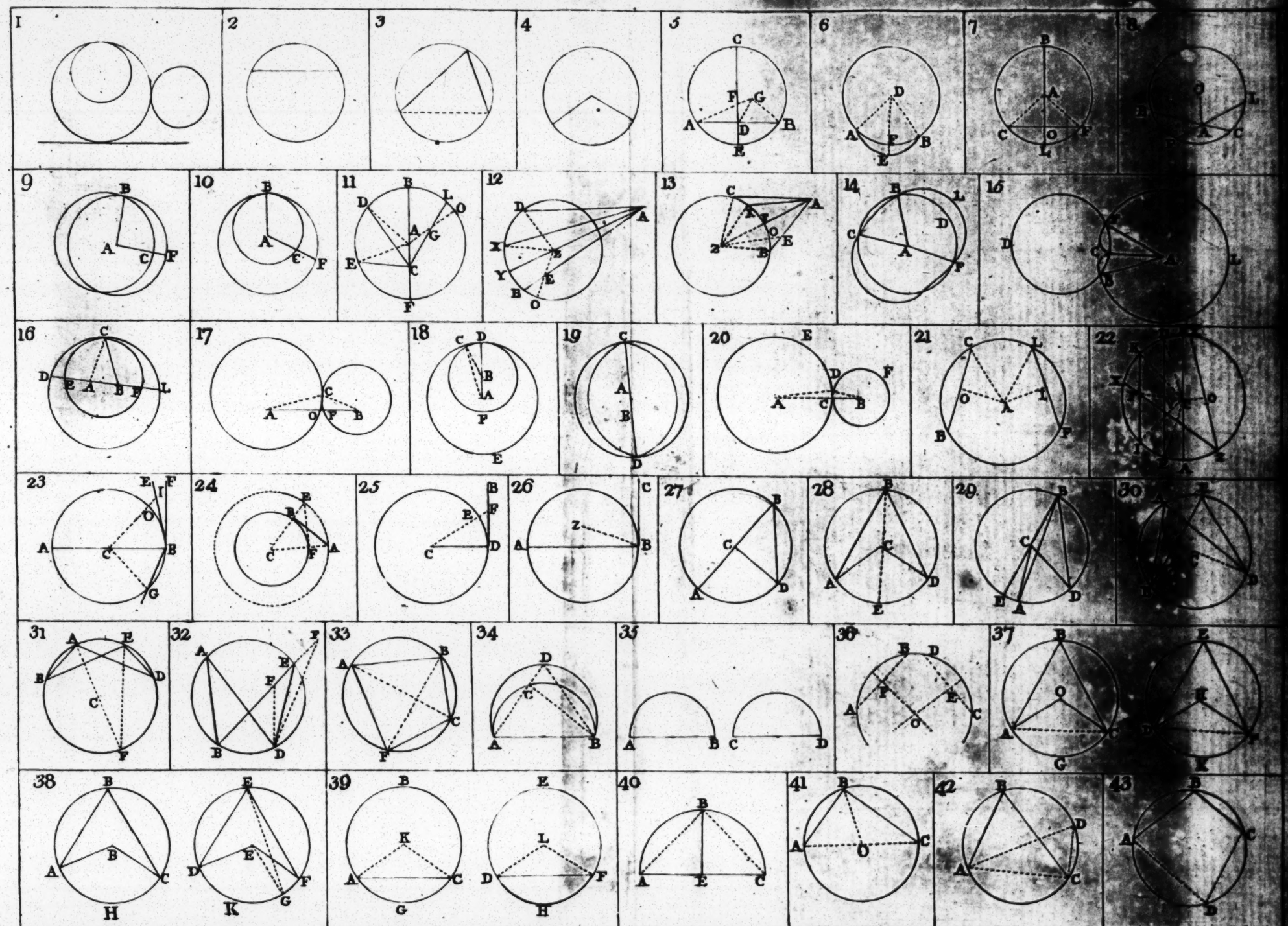
SECUNDA

Liber Secundus

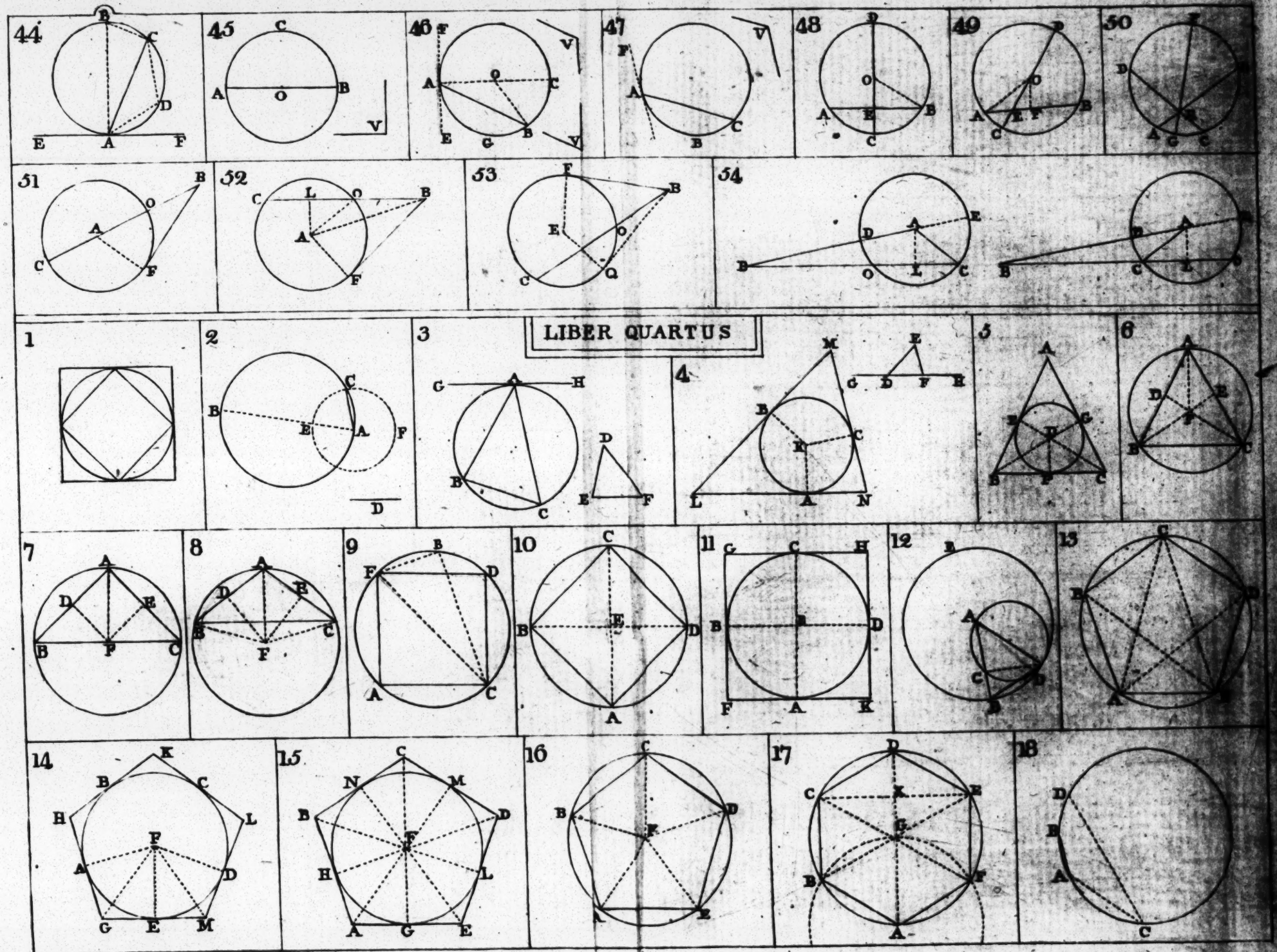


TABULA

TERTIA.



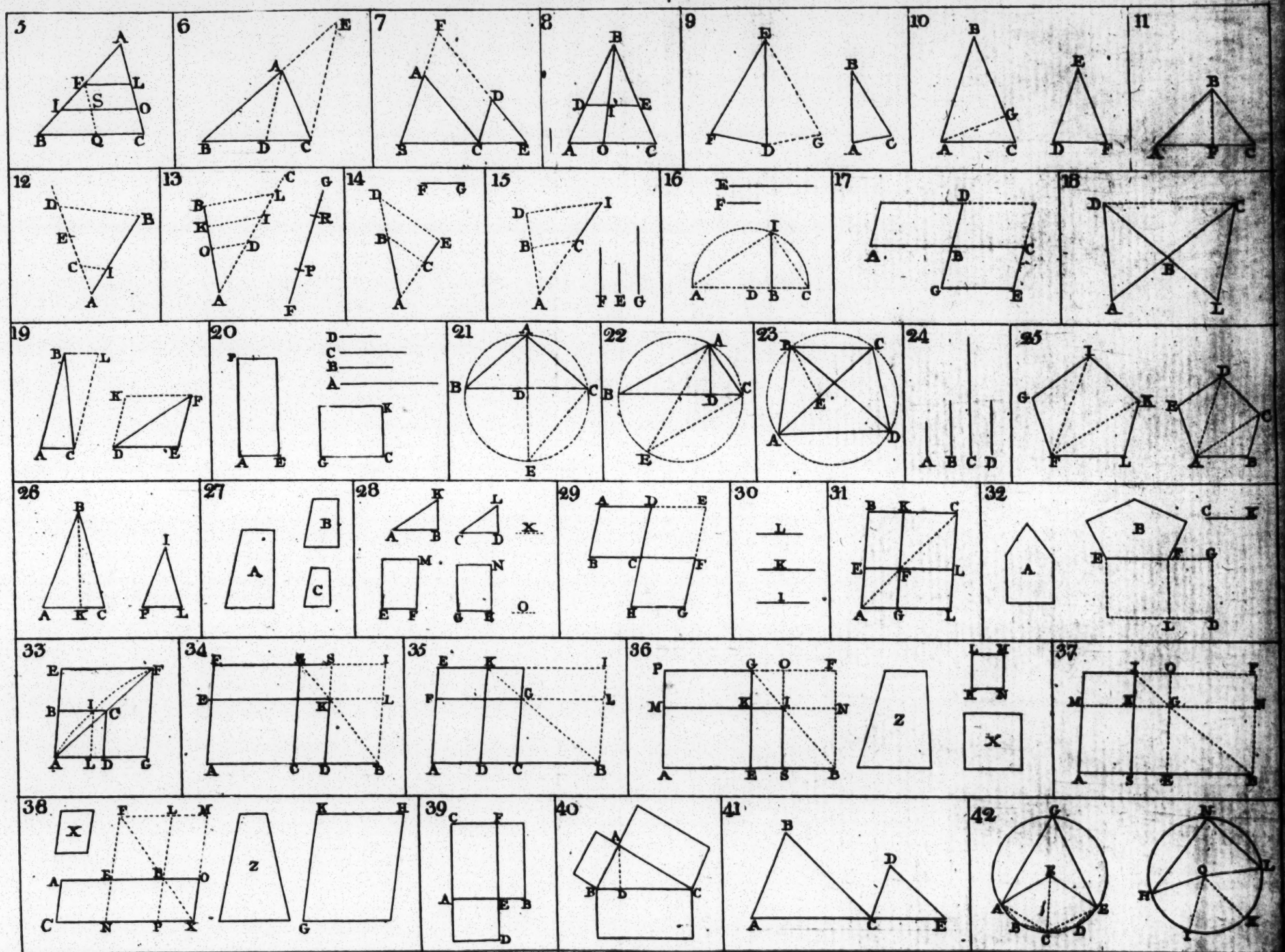
TABULA QUARTA.



TABULA QUINTA

1 	2 	3 	4 	5 	6 	7 	8 	9
10 	11 	12 	13 	14 	15 	16 	17 	
18 	19 	20 	21 	22 	23 	24 		
25 	26 	27 	28 	29 	30 			
31 	32 	33 	34 					
1 	2 	LIBER SEXTUS		4 				

TABULA SEXTA



TABULA SEPTIMA.

